

С. В. ПЕТКОВА

ОБ АКСИОМАХ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 XI 1971)

Необходимость в пополнении данного в ⁽³⁾ списка аксиом, определяющих однозначно теорию гомологий (когомологий) за пределами категории конечных полиэдров, хорошо известна. Ниже будут даны аксиомы для гомологий и когомологий, лишь немногим расширяющие список из ⁽³⁾, в некоторых достаточно широких категориях. Аксиоматика отличается от той, которая дана в ⁽²⁾.

Обозначим через $\mathcal{A}$ категорию счетных локально конечных полиэдров и их собственных отображений, через $\mathcal{B}_0$ — категорию компактных метризуемых пространств и их непрерывных отображений и через $\mathcal{B}$ — локально компактных пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности и их собственных отображений.

Пусть X — объединение своих открытых непересекающихся подпространств X_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, а $j_k: X \rightarrow (X, \bigcup_{s \neq k} X_s)$ и $i_k: X_k \rightarrow (X, \bigcup_{s \neq k} X_s)$ — вложения (i_{k*} — изоморфизм).

Аксиома П-аддитивности (на категориях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$). Гомоморфизмы $g_k = i_{k*}^{-1} j_{k*}: H_n(X) \rightarrow H_n(X_k)$ определяют для каждого n проективное представление $H_n(X)$ в виде прямого произведения $H_n(X_k)$.

Предположим, что $X \in \mathcal{B}_0$ является букетом своих компактных подпространств X_k , а g_k — проекция X на X_k .

Аксиома P_c -аддитивности (на категории $\mathcal{B}_0$). Гомоморфизмы $g_k: H_n(X) \rightarrow H_n(X_k)$ представляют $H_n(X)$ в виде прямого произведения $H_n(X_k)$ (в размерности ноль — приведенные гомологии).

Даваемая ниже аксиоматика в категориях $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}$ сходна с аксиоматикой Милнора на категории комплексов ⁽⁴⁾ в том смысле, что по сравнению с аксиомами из ⁽³⁾ практически добавляется лишь одно требование — требование П-аддитивности. На категории $\mathcal{A}$ аксиома вырезания понимается обычным образом. Аксиома вырезания на категориях $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}$ будет сформулирована в соответствующих местах.

Теорема 1. Если H_* — теория гомологий на категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая, кроме аксиом 1—7 из ⁽³⁾, еще аксиоме П-аддитивности, то H_* определена однозначно с точностью до естественного преобразования (и, следовательно, эквивалентна симплициальным гомологиям второго рода).

Список аксиом на категории $\mathcal{B}_0$. Аксиомы 1 — 5, 7 из ⁽³⁾; аксиома 6: для всякой компактной пары (X, A) отображение этой пары на фактор-пространство X/A индуцирует изоморфизм гомологий (в размерности ноль гомологии приведенные); аксиома 8 — аксиома P_c -аддитивности.

Теорема 2. В категории $\mathcal{B}_0$ описанная в ⁽¹⁾ теория канонических гомологий является единственной, удовлетворяющей требованиям аксиом указанного выше списка.

Список аксиом на категории $\mathcal{B}$. Аксиомы 1 — 5, 7 из ⁽³⁾; аксиома 6: для каждой пары $(\bar{X}, A)$ существует изоморфизм $\alpha: H_n(X \setminus A) \rightarrow H_n(X, A)$, обладающий следующими свойствами:

Если f — собственное отображение пары (X, A) в пару (Y, B) , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_*(X, f^{-1}B) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, B) \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \alpha \\ H_*(X \setminus fB) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y \setminus B) \end{array}$$

коммутативна, и для произвольной триады (X, A, B) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(X \setminus B, A \setminus A \cap B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A \setminus A \cap B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(X, A \cup B) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(A, A \cap B) \end{array},$$

где по вертикали стоят изоморфизмы, определенные α . Аксиома 8 — аксиома Π -аддитивности.

Теорема 3. В категории $\mathcal{B}$ канонические гомологии являются единственными, удовлетворяющими всем перечисленным аксиомам (описание канонических гомологий см. в ⁽¹⁾).

Результаты, аналогичные сформулированным выше, справедливы и для когомологий во всех трех категориях. В качестве аксиомы 8 будут фигурировать аксиомы Σ -аддитивности (на категориях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) и аксиома Σ_c -аддитивности (на категории $\mathcal{B}_0$), представляющие когомологический вариант вышеуказанных аксиом Π -аддитивности.

Теорема 4. Если H^* — теория когомологий на категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая, кроме аксиом 1 — 7 из ⁽³⁾, еще аксиоме Σ -аддитивности, то H^* определена однозначно с точностью до естественного преобразования (и, следовательно, эквивалентна симплициальным когомологиям второго рода).

Список аксиом на категории $\mathcal{B}_0$. Аксиомы 1 — 5, 7 из ⁽³⁾; аксиома 6: для всякой компактной пары (X, A) отображение этой пары на фактор-пространство X/A индуцирует изоморфизм когомологий (в размерности нуль — приведенные когомологи); аксиома 8 — аксиома Σ_c -аддитивности.

Теорема 5. В категории $\mathcal{B}_0$ теория когомологий Александрова — Чеха является единственной, удовлетворяющей требованиям аксиом указанного выше списка.

Список аксиом на категории $\mathcal{B}$. Аксиомы 1 — 5, 7 из ⁽³⁾; аксиома 6 — когомологический аналог аксиомы 6 из теоремы 3; аксиома 8 — аксиома Σ -аддитивности.

Теорема 6. В категории $\mathcal{B}$ когомологии Александрова — Чеха с компактными носителями являются единственными когомологиями, удовлетворяющими всем перечисленным аксиомам.

Сформулированная выше теорема 2 дает возможность перечислить систему аксиом, однозначно определяющую теорию канонических гомологий с компактными носителями на категории $\mathcal{C}$ топологических пространств, в которых каждое компактное подпространство метризуемо.

Система аксиом в категории $\mathcal{C}$. Аксиомы 1 — 5, 7 из ⁽³⁾; аксиома 6: проекция $(X, C) \rightarrow X/C$ индуцирует изоморфизм групп гомологий для компактных C ; аксиома 8 — аксиома Π_c -аддитивности; аксиома 9 — аксиома компактных носителей.

Теорема 7. На категории $\mathcal{C}$ канонические гомологии с компактными носителями являются единственными, удовлетворяющими перечисленным выше аксиомам.

В теореме 6 указана аксиоматика когомологий Александрова — Чеха с компактными носителями (когомологии второго рода). Рассмотрим обыч-

ные когомологии Александрова — Чеха в категории L локально компактных пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, и их непрерывных отображений. Когомологии H^* назовем Π -аддитивными в $\mathcal{L}$, если когомологии объединения дискретной системы пространств естественно изоморфны (посредством вложений) прямому произведению когомологий этих пространств.

Теорема 8. Если H^* — распространение когомологий Александрова — Чеха с категории $\mathcal{B}_0$ на категорию $\mathcal{L}$, удовлетворяющее условию Π -аддитивности на $\mathcal{L}$, то H^* совпадает на $\mathcal{L}$ с когомологиями Александрова — Чеха.

Это означает, что из любого списка аксиом, определяющих однозначно когомологии Александрова — Чеха на категории $\mathcal{B}_0$, можно получить систему аксиом, определяющих однозначно эти когомологии на $\mathcal{L}$. Для этой цели достаточно пополнить список лишь одним требованием — условием Π -аддитивности, применяемым специально к некомпактным пространствам.

Пусть H^* — Π -аддитивная теория когомологий, а X — произвольное нормальное пространство, являющееся объединением своих замкнутых подмножеств $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots X_k \subset \dots$ таких, что $X_k \subset \text{Int } X_{k+1}$ и

$\text{Int } X_1 = \emptyset$. Обозначим через $d_n: \prod_{k=1}^{\infty} H^n(X_k) \rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} H^n(X_k)$ гомоморфизм, определяемый формулой $d_n(h_1, h_2, \dots, h_k, \dots) = (h_1 - i_1^* h_2, h_2 - i_2^* h_3, \dots, h_k - i_k^* h_{k+1}, \dots)$, а через $\varphi_n: H^n(X) \rightarrow \varprojlim_k H^n(X_k)$ — естественное отображение модуля $H^n(X)$ в $\varprojlim_k H^n(X_k)$.

Предложение 1. Короткая последовательность

$$0 \rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(X_k) / \text{Im } d_{n-1} \rightarrow H^n(X) \xrightarrow{\varphi_n} \varprojlim_k H^n(X_k) \rightarrow 0$$

точна.

Предположим, что X — некомпактное пространство из $\mathcal{L}$, а последовательность $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из компактных подпространств.

Предложение 2. Ядро естественного гомоморфизма $\varphi_n: H^n(X) \rightarrow \varprojlim_k H^n(X_k)$ (по всем компактным C) изоморфно $*$ группе

$$\prod_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(X_k) / \text{Im } d_{n-1}.$$

Напомним, что на категориях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ аксиома 8 из ⁽²⁾ есть аксиома Π -аддитивности, выполненная для счетного дискретного множества точек $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots)$. Аналогично, на категории $\mathcal{B}_0$ аксиома 8 — это тот частный случай аксиомы Π_c -аддитивности, когда $X = \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — одноточечная компактификация $\mathcal{D}$ посредством некоторой точки $*$, а $X_k = d_k$. Таким образом, на категориях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ группа $H_0(\mathcal{D})$, а на категории

$\mathcal{B}_0$ — группа $H_0(\mathcal{D}, *)$, естественно изоморфны $\prod_{k=1}^{\infty} H_0(d_k)$. Из условия, содержащегося в аксиоме 9 из ⁽²⁾, вытекает, что для любой аксиоматической теории H_*' на категориях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ модуль $H_0'(\mathcal{D})$ является подмодулем в

$\prod_{k=1}^{\infty} H_0'(d_k)$ ($H_0'(\mathcal{D})$, очевидно, содержит $\prod_{k=1}^{\infty} H_0'(d_k)$). Аналогичное включение в категории $\mathcal{B}_0$ есть следствие аксиомы 7 из ⁽²⁾. Гомологии $\mathcal{D}$ в других размерностях равны нулю. В связи с этим некоторый интерес представляет вопрос, не вытекает ли аксиома 8 из остальных (имеется в виду

* Пример, когда ядро гомоморфизма φ_n нетривиальное, показан в ⁽²⁾.

аксиоматика из $(^2)$). Ответ на этот вопрос отрицателен для случая, когда группа коэффициентов G не имеет конечного числа образующих, как это видно из примера гомологии Бореля — Мура (см. $(^2)$). В том случае, когда G — группа с конечным числом образующих, имеет место

Предложение 3. Если H_' — теория гомологий на категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0$ или $\mathcal{B}$, удовлетворяющая всем аксиомам соответствующей категории, перечисленным в $(^2)$, кроме аксиомы 8, а G — группа с конечным числом образующих, то H_*' удовлетворяет и аксиоме 8, т. е. совпадает с единственной теорией гомологий на соответствующей категории.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Г. Скляренко, УМН, 24, № 5, 87 (1969). ² Е. Г. Скляренко, Математич. сборн., 85, № 2 (1971). ³ Н. Стийрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, ИЛ, 1958. ⁴ J. Milnor, Pacific J. Math., 12, 337 (1962). ⁵ A. Borel, J. Moore, Michigan Math. J., 7, 137 (1960).