

М. С. БУРГИН

СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 X 1971)

В работе продолжается изучение свободных топологических групп, введенных А. А. Марковым в ⁽¹⁾, и свободных топологических универсальных алгебр, теория которых была развита А. И. Мальцевым в ⁽²⁾. Там были доказаны существование и единственность свободных топологических алгебр, а также исследовались различные вопросы, связанные с этим понятием. В конце работы А. И. Мальцев сформулировал несколько задач, решение которых представляло бы интерес для развития теории свободных топологических алгебр. Одна из этих задач была решена в ⁽⁷⁾, а решения еще двух можно получить в качестве следствий некоторых результатов этой работы. Отметим, что хотя полученные результаты формулируются для универсальных алгебр, т. е. в естественной для них общности, они являются новыми и для топологических групп.

1. Топологическая универсальная алгебра A из класса универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ задана в $\mathfrak{A}$ топологическим пространством X и множеством соотношений S , если (см. ⁽²⁾) выполняются условия:

F1. Задано непрерывное отображение $\sigma: X \rightarrow A$ и для образов элементов из X выполняются в A соотношения из S .

F2. $A = \{X\}_A$, где $\{X\}_A$ — замыкание в A подалгебры, порожденной X в A .

F3. Если B — топологическая алгебра из $\mathfrak{A}$, $\lambda: X \rightarrow B$ — непрерывное отображение и для образов элементов из X выполняются в B соотношения из S , то $\lambda = \sigma\alpha$ для некоторого единственного непрерывного гомоморфизма $\alpha: A \rightarrow B$.

Если $\mathfrak{A}$ — многообразие (см. ⁽⁶⁾) и множество S пусто, то A называется свободной топологической алгеброй многообразия $\mathfrak{A}$ над топологическим пространством X . При этом (см. ⁽²⁾) A алгебраически порождается образами элементов из X , т. е. $A = \{X\}_A$ и любой элемент из A имеет вид $f(\sigma x_1, \dots, \sigma x_n)$, где σx_i — образ элемента x_i при отображении σ , $f(y_1, \dots, y_n)$ — выражение (многочлен), полученное применением операций алгебры A к элементам $y_1, \dots, y_n$ из A .

Если алгебра A алгебраически порождается элементами топологического пространства X , то множество $U \subseteq A$ называется X_0 -открытым (см. ⁽²⁾), когда для любого элемента $a \in U$, имеющего вид $f(x_1, \dots, x_n)$, существуют в X такие окрестности $U_i \ni x_i$, $i = 1, \dots, n$, что $f(U_1, \dots, U_n) \subseteq U$. Топология, определенная X_0 -открытыми множествами в алгебре A , называется X_0 -топологией.

Лемма 1. Если топологическая алгебра F содержит X как подпространство, является (алгебраически) свободной в многообразии $\mathfrak{A}$ с системой свободных образующих X и топология алгебры F является X_0 -топологией, то F — свободная топологическая алгебра многообразия $\mathfrak{A}$ над пространством X .

Опираясь на это утверждение и используя понятие L_0 -топологии, введенное в ⁽²⁾, доказывается

Теорема 1. Если F — свободная топологическая алгебра многообразия $\mathfrak{A}$ над пространством X , алгебраически свободна над X , имеет X_0 -топологию и Y — подпространство пространства X , то $\{Y\}_F$ — свободная топологическая алгебра многообразия $\mathfrak{A}$ над пространством Y .

Полученный результат применим для случая, когда пространство X бикомпактно. При этом свободная топологическая алгебра F многообразия $\mathfrak{A}$ над X удовлетворяет требованиям теоремы 1 (см. ⁽²⁾), §§ 5, 7, п ⁽⁷⁾). Поэтому справедлива

Теорема 2. Если F — свободная топологическая алгебра многообразия $\mathfrak{A}$ над бикомпактом X , то любое подпространство Y пространства X порождает в F подалгебру, свободную топологически в многообразии $\mathfrak{A}$ над пространством Y .

Любое вполне регулярное пространство вложимо в бикомпактное (см. ⁽³⁾). Следовательно, из теорем 1, 2 и результатов § 7 работы ⁽²⁾ вытекает

Теорема 3. Свободная топологическая алгебра многообразия универсальных алгебр над вполне регулярным пространством X имеет X_0 -топологию.

Следствие 1. Любая свободная топологическая алгебра над вполне регулярным пространством вложима в бикомпактно порожденную свободную топологическую алгебру того же многообразия.

Следствие 2. Пространство свободной топологической алгебры над вполне регулярным пространством само вполне регулярно.

Доказательство вытекает из следствия 1 и того, что пространство бикомпактно порожденной свободной топологической алгебры по теореме 9 из ⁽²⁾ нормально.

Отметим, что так как по теореме Понтрягина (см. ⁽⁴⁾) пространство любой топологической группы вполне регулярно, то теорема 3 описывает топологию произвольной свободной топологической группы (абелевой группы) в смысле А. А. Маркова (см. ⁽¹⁾). А это дает ответ на вопрос А. И. Мальцева о топологии свободных топологических групп над вполне регулярными пространствами (см. ⁽²⁾).

Укажем еще одно применение полученных результатов к теории топологических групп. Топологическая группа полна в смысле Вейля (см. ⁽³⁾), если любая сходящаяся центрированная система замкнутых множеств в группе имеет непустое пересечение, и называется пополняемой в смысле Вейля, если она вложима в полную топологическую группу. Известно (см. ⁽⁴⁾), что не любая топологическая группа пополняема в смысле Вейля. Однако имеет место

Следствие 3. Любая свободная в некотором многообразии топологическая группа пополняема в смысле Вейля.

Доказательство вытекает из того, что по следствию 1 такая группа вложима в бикомпактно порожденную свободную топологическую группу, а бикомпактно порожденная топологическая группа, свободная в некотором многообразии, полна в смысле Вейля. Действительно, доказательство теоремы 6 из ⁽³⁾, проведенное для абсолютно свободных топологических групп, без малейших изменений проходит и для свободных в некотором многообразии топологических групп, что доказывает их полноту.

При дополнительных условиях на многообразии универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ результат теоремы 3 можно усилить. А именно, потребуем, чтобы многообразие $\mathfrak{A}$ удовлетворяло условию, введенному в ⁽³⁾: в многообразии $\mathfrak{A}$ все конгруэнтности перестановочны. Тогда справедлива

Теорема 4. Если топологическая алгебра $A \in \mathfrak{A}$ задана в $\mathfrak{A}$ своим подпространством X , имеющим вполне регулярную топологию, и некоторым множеством определяющих соотношений S , то алгебра A имеет X_0 -топологию.

Любое многообразие групп удовлетворяет условию перестановочности

конгруэнтностей (см. ⁽⁶⁾), поэтому теорема 4 описывает топологию произвольной топологической группы, заданной порождающим пространством и системой определяющих соотношений.

Свободная топологическая группа в смысле М. И. Граева ⁽³⁾ является топологической группой, заданной (см. выше) вполне регулярным пространством X и одним определяющим соотношением $x_0 = 0$, где $x_0 \in X$. Следовательно, теорема 4 описывает топологию свободных топологических групп в смысле Граева.

2. Подкатегория $\mathfrak{C}$ некоторой категории $\mathfrak{A}$ называется рефлексивной (см. ⁽⁹⁾), если для любого объекта $A \in \mathfrak{A}$ существует морфизм $\pi_A: A \rightarrow R(A)$, $R(A) \in \mathfrak{C}$, и для любого морфизма $\alpha: A \rightarrow B$, $B \in \mathfrak{C}$, существует единственный морфизм $\beta: R(A) \rightarrow B$, для которого $\alpha = \pi_A \beta$. Объект $R(A)$ называется $\mathfrak{C}$ -репликой объекта A . Если в качестве $\mathfrak{A}$ взять категорию всех хаусдорфовых или регулярных топологических пространств, то полная подкатегория $\mathfrak{C}$, порожденная всеми вполне регулярными пространствами, будет рефлексивной (см. ⁽⁹⁾).

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $R(X)$ — вполне регулярная реплика X и $\mathfrak{A}$ — класс топологических универсальных алгебр, топология которых вполне регулярна. Рассмотрим свободную топологическую алгебру F класса $\mathfrak{A}$ над пространством $R(X)$. По определению, существует непрерывное отображение $\delta: R(X) \rightarrow F$. Произведение непрерывных отображений непрерывно, поэтому получаем непрерывное отображение $\sigma = \pi_A \delta: X \rightarrow F$. Тогда из свойств реплик и свободных топологических алгебр вытекает

Лемма 2. F является свободной топологической алгеброй класса $\mathfrak{A}$ над топологическим пространством X .

Скажем, что универсальная алгебра A удовлетворяет условию (Г), если A имеет транзитивную группу элементарных трансляций (см. ⁽⁶⁾, стр. 101) и среди всех операций, определенных на A , имеется n -арная операция ω ($n \geq 2$), удовлетворяющая в A тождеству

$$(x_1 \dots x_n \omega) x_{n+1} \dots x_{2n-1} \omega = x_1 \dots x_{n-1} (x_n \dots x_{2n-1} \omega) \omega.$$

Лемма 3. Универсальная алгебра A тогда и только тогда является группой относительно одной из своих операций, когда A удовлетворяет условию (Г), и если при этом A — топологическая алгебра, то ее пространство вполне регулярно.

Класс универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию (Г), если этому условию удовлетворяют все алгебры из $\mathfrak{A}$.

Из лемм 2, 3 и результата Сверчковского, полученного в ⁽⁷⁾, вытекает

Теорема 5. Свободная топологическая алгебра многообразия $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию (Г), над хаусдорфовым пространством X алгебраически свободна в многообразии $\mathfrak{A}$.

В частности, для топологических групп это дает ответ на вопрос А. И. Мальцева из ⁽²⁾: будет ли свободная топологическая группа над регулярным пространством алгебраически свободной? Заметим, что в качестве следствий аналогичные результаты верны для различных многообразий не только топологических групп, но и топологических колец или линейных алгебр.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, 1 (1945). ² А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 2 (1957). ³ М. И. Граев, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 3 (1948). ⁴ М. И. Граев, УМН, 5, № 2 (1950). ⁵ П. С. Александров, УМН, 2, № 1 (1948). ⁶ П. Коп, Универсальная алгебра, М., 1968. ⁷ S. Swierczkowski, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 55 (1964). ⁸ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 35, 1 (1954). ⁹ J. F. Kennison, Trans. Am. Math. Soc., 116, 6 (1965).