Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 513.82+511 *МАТЕМАТИКА*

С. С. РЫШКОВ

О МАКСИМАЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ $(n\times n)$-МАТРИЦ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 XI 1971)

1°. Чрезвычайно давно известна теорема Жордана о том, что число попарно неэквивалентных конечных групп целочисленных $(n \times n)$-матриц для каждого n конечно. При $n = 3$ все 73 такие группы также давно известны ([1-3]), поскольку их знание необходимо в кристаллографии; однако уже при $n = 4$ все такие группы (710) найдены только в самое последнее время ([4]).

В 1965 г. Дэйд поставил вопрос о разыскании всех, разумеется, с точностью до эквивалентности, максимальных конечных групп целочисленных матриц. В работе ([5]) он нашел все (их оказалось 9) такие максимальные группы при $n = 4$, указав те положительно определенные квадратичные формы от четырех переменных, группами целочисленных автоморфизмов которых являются искомые группы. В этой постановке вопроса остальные группы предлагается искать как подгруппы максимальных; проведение именно этих вычислений и анонсировано в заметке ([4]).

В работе ([6]) Г. Ф. Вороной рассмотрел квадратичные формы, которые он назвал «совершенными». Теория этих форм совпадает с теорией полиэдра $\Pi(n)$, см. ниже. Основной метод предлагаемой заметки связан с рассмотрением «целочисленных симметрий» полиэдра Вороного $\Pi(n)$. В заметке приводится способ, позволяющий при любом $n \geqslant 2$ указывать некоторый ограниченный запас положительно определенных квадратичных форм от n переменных, среди групп целочисленных автоморфизмов которых находятся все максимальные конечные группы целочисленных $(n \times n)$-матриц. Этим способом найдены все неэквивалентные положительно определенные квадратичные формы, дающие максимальные конечные группы целочисленных (5×5)-матриц, а также подтвержден результат Дэйда ([5]) при $n = 4$.

2°. Рассмотрим пространство R^N, где $N = {}^1/_2 n(n+1)$,— пространство коэффициентов квадратичных форм от n переменных. Положительно определенным формам в нем соответствуют точки некоторого выпуклого открытого конуса $\mathbf{K}$ с границей $\dot{K}$. Квадратичную форму и точку пространства R^N, ей соответствующую, будем обозначать одной и той же буквой.

Рассмотрим все квадратичные формы вида $(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n)^2$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — произвольные наборы целых, не имеющих общего делителя чисел. Выпуклая оболочка всех соответствующих этим формам точек (все они лежат в абсолюте, т. е. в поверхности $\dot{K}$) есть бесконечный полиэдр $\Pi(n)$ — так называемый полиэдр Вороного, см. ([6-9]). В настоящее время он известен до $n = 6$ ([10]).

Обозначим через G группу всех целочисленных унимодулярных матриц. Эта группа порождает, через преобразования переменных квадратичной формы, некоторую подгруппу $\mathfrak{G}$ группы эквиаффинных преобразований пространства R^N.

Перечислим теперь некоторые свойства полиэдра $\Pi(n)$.

1) Полиэдр $\Pi(n)$ инвариантен относительно всех преобразований из группы $\mathfrak{G}$.

2) В каждой размерности $m \leqslant N - 1$ существует лишь конечное число попарно неэквивалентных собственных (т. е. не лежащих целиком в абсолюте) граней полиэдра $\Pi(n)$.

3) Для каждой точки $f \in K$ найдется такое число $t > 0$ и такая, не обязательно $(N-1)$-мерная, грань F полиэдра $\Pi(n)$, что точка tf лежит внутри грани F.

3°. Теорема 1. *Для разыскания всех конечных попарно неэквивалентных максимальных групп целочисленных* $(n \times n)$*-матриц достаточно рассмотреть группы целочисленных автоморфизмов всех квадратичных форм, являющихся центрами тяжести * попарно неэквивалентных собственных граней полиэдра Вороного* $\Pi(n)$.

Пусть задана произвольная конечная группа g целочисленных $(n \times n)$-матриц, т. е. произвольная конечная подгруппа группы G. Согласно известной теореме Машке, существует такая положительно определенная квадратичная форма f, что группа g является подгруппой группы целочисленных автоморфизмов формы f. При некотором t квадратичная форма, точка tf лежит внутри одной из собственных граней полиэдра $\Pi(n)$, быть может, низкой размерности. Обозначим эту грань через F. При всех преобразованиях из группы $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{G}$, порожденной группой g, точка tf, а потому и грань F, переходит в себя. В силу же аффинности преобразований группы $\mathfrak{g}$ она оставляет на месте и центр тяжести f_* грани F. Таким образом, группа g есть либо полная группа целочисленных автоморфизмов формы f_*, либо ее подгруппа. Но целочисленно эквивалентным формам соответствуют целочисленно эквивалентные группы целочисленных автоморфизмов, а у эквивалентных граней центры тяжести — целочисленно эквивалентные положительно определенные формы. Следовательно, нам достаточно рассмотреть только центры тяжести всех попарно неэквивалентных граней полиэдра $\Pi(n)$, число которых конечно.

Теорема доказана.

Следствие. Теорема Жордана. *Для каждого* $n > 1$ *существует лишь конечное число попарно неэквивалентных конечных групп целочисленных* $(n \times n)$*-матриц.*

Замечание 1. В теореме 1 полиэдр (разбиение) Вороного может быть заменен любым разбиением из очень широкого класса инвариантных относительно группы $\mathfrak{G}$ разбиений конуса K. В качестве примера приведем две следующие теоремы.

Теорема 2. *Для разыскания всех попарно неэквивалентных максимальных групп целочисленных* $(n \times n)$*-матриц достаточно рассмотреть группы целочисленных автоморфизмов всех положительно определенных квадратичных форм, являющихся суммами невырожденных, приведенных к одному и тому же дискриминанту, реберных форм области приведения Минковского* ([11], [12]).

Теорема 3. *Для разыскания всех попарно неэквивалентных максимальных групп целочисленных* $(n \times n)$*-матриц достаточно рассмотреть группы целочисленных автоморфизмов всех положительно определенных квадратичных форм, являющихся центрами тяжести попарно неэквивалентных граней полиэдра* $M(n)$ ([13], [14]).

Всё дальнейшее изложение мы опять будем проводить, исходя из конструкций, связанных с полиэдром $\Pi(n)$.

4°. При фактических вычислениях очень полезны две следующие леммы, в которых через $\mathfrak{g}(F)$ обозначена группа всех преобразований из группы $\mathfrak{G}$, переводящих в себя произвольную собственную грань F полиэдра $\Pi(n)$.

---

* Под словами «центр тяжести» здесь можно подразумевать и центр тяжести многогранника с распределенной массой, и центр тяжести совокупности вершин — это не отражается ни на доказательстве, ни (до $n = 5$) на вычислениях.

Таблица 1

	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{44}	a_{55}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{34}	a_{35}	a_{45}	m
1	2	2	2	2	2	−1	0	0	0	−1	0	0	−1	0	−1	5
2	5	5	5	5	5	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	14
3	2	2	2	2	2	1	0	−1	−1	0	−1	−1	−1	−1	1	4
4	5	5	4	4	4	3	−2	−2	−2	−2	−2	−2	0	0	0	14
5	4	4	4	4	4	2	−1	−2	−2	−2	−2	−2	−1	−1	1	9
6	4	4	3	3	3	2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	1	1	1	14
7	2	2	2	2λ	2λ	−1	0	0	0	−1	0	0	0	0	$-\lambda$	6
8	3	3	3	2λ	2λ	−1	−1	0	−1	0	0	0	0	0	$-\lambda$	8
9	4	4	4	4	λ	1	−2	−2	0	−2	−2	0	1	0	0	9
10	2	2	2	2	λ	−1	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	5
11	4	4	4	4	λ	−1	−1	−1	0	−1	−1	0	−1	0	0	10
12	2	2	2	2	λ	1	−1	−1	0	−1	−1	0	0	0	0	10
13	2	2	2	2	λ	−1	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	6
14	2	2	2	λ	λ	−1	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	5
15	3	3	3	λ	λ	−1	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	7
16	2	2	λ	λ	λ	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
17	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4

Примечание. Всюду здесь $\lambda > 0$.

Лемма 1 [2]. *Пусть $F \subset F'$ — произвольные собственные грани полиэдра $\Pi(n)$, и пусть все преобразования из группы $\mathfrak{g}(F')$ (из группы $\mathfrak{g}(F)$) переводят в себя и грань F (и грань F').*

Тогда группа $\mathfrak{g}(F')$ есть подгруппа группы $\mathfrak{g}(F)$ (группа $\mathfrak{g}(F)$ есть подгруппа группы $\mathfrak{g}(F')$).

5°. Теорема 4. *Полные группы целочисленных автоморфизмов данных ниже 17 квадратичных форм суть неэквивалентные максимальные конечные группы целочисленных $(n \times n)$-матриц. Эти формы дают полный набор таких групп. Коэффициенты a_{ij} этих форм с точностью до пропорциональности задаются табл. 1.*

Размерность полиэдра $\Pi(5)$ равна 15, полиэдр имеет три неэквивалентных друг другу 14-мерных грани. Автором найден набор в 508 граней, среди которых находятся грани, эквивалентные каждой собственной грани полиэдра $\Pi(5)$. Все грани, кроме 24, отсеиваются употреблением леммы 1, а затем снова отбрасыванием эквивалентных граней; 5 граней отбрасывается леммой 2; и еще две через вычисление группы центров их тяжести и исследование соответствующих многообразий Бравэ [15], т. е. многообразий форм, инвариантных относительно этих групп. Максимальность и попарное несовпадение групп автоморфизмов оставшихся 17 форм доказывается через изучение размерности и расположения многообразий Бравэ этих групп. В табл. 1 около каждой из 17 строк коэффициентов форм выписана размерность m соответствующей грани полиэдра $\Pi(5)$.

Замечание 2. Размерность полиэдра $\Pi(4)$ равна 10. Он имеет две неэквивалентных 9-мерных грани, а всего попарно неэквивалентных собственных граней 18. Однако все грани низших размерностей, кроме одной, суть грани той 9-мерной грани, которая является «прямым обобщением» единственной грани старшей размерности полиэдра $\Pi(n)$ при $n = 2$ и 3. Как нам кажется, это последнее обстоятельство и сделало возможным отыскать все максимальные группы при $n = 4$ методом Дэйда.

6°. Все «максимальные», т. е. дающие максимальные группы, формы при $n = 2, 3, 4$ можно получить из максимальных форм при $n = 5$ таким образом: при $n = 2$ в формах 16 и 17, положив $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; при $n = 3$ в формах 14—17, положив $x_4 = x_5 = 0$; при $n = 4$ в формах 9—17, положив $x_5 = 0$.

Изучая все эти формы при $n \leqslant 5$, нетрудно заметить, что это либо совершенные формы, либо им взаимные, либо суммы таких максимальных форм от меньшего числа переменных, либо, наконец ($n = 4$, табл. 1, форма 9 при $x_5 = 0$),— это форма, матрица которой эквивалентна кронекеровскому произведению матриц максимальных форм от меньшего числа переменных. Возникает вопрос, всегда ли список квадратичных форм, дающих максимальные группы, построен таким способом. Исчерпывает ли такой список все нужные нам формы, автору неизвестно. Однако при $n = 6$ существует совершенная, но не максимальная форма.

7°. Принципиальная часть этой работы неоднократно обсуждалась в отделе геометрии Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, руководимом Б. Н. Делоне; всем участникам этих обсуждений автор выражает признательность за полезные советы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Шубников, Е. Е. Флинт, Г. Б. Бокий, Основы кристаллографии, Изд. АН СССР, 1940. [2] Б. Н. Делоне, Н. Н. Падуров, А. Д. Александров, Математические основы структурного анализа кристаллов, 1934. [3] Р. В. Галиулин, Матрично-векторный способ вывода федоровских групп, Деп. ВИНИТИ, 1969. [4] J. Neubüser, H. Wondratschek, Acta crystallogr., **A25**, Supplement (1969). [5] E. C. Dade, Illinois J. Math., **9**, № 1 (1965). [6] Г. Ф. Вороной, Собр. соч., **2**, Киев, 1952, стр. 171. [7] Б. А. Венков, В кн. Г. Ф. Вороной, Собр. соч., **2**, Киев, 1952, стр. 379. [8] Б. А. Венков, Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 1 (1940). [9] Б. Н. Делоне, С. С. Рышков, ДАН, **173**, № 5 (1967). [10] E. S. Barnes, Phil Trans. Roy. Soc. London, **A249** (1957). [11] H. Minkowski, J. reine agnew. Math., **129** (1905). [12] С. С. Рышков, ДАН, **198**, № 5 (1971). [13] С. С. Рышков, ДАН, **194**, № 3 (1970). [14] Б. Н. Делоне, С. С. Рышков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **112**, 203 (1971). [15] Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова, Там же, **64**, 28 (1961).