Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

П. М. ТАМРАЗОВ

КОНТУРНЫЕ И ТЕЛЕСНЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 XI 1971)

Обозначим через $\mathfrak{G}$ класс всех ограниченных открытых множеств на комплексной плоскости, каждое из которых имеет связное дополнение.

Модули непрерывности и производные функций, взятые по замкнутому множеству, будем называть **телесными**, а аналогичные величины, взятые по границе этого множества, будем называть **контурными** (см. ([1])).

Пусть G — открытое множество, $\overline{G}$ — его замыкание, а $f(\zeta)$ — функция, заданная на $\overline{G}$ и голоморфная в G. Телесные производные, модули непрерывности и локальные модули непрерывности функции $f(\zeta)$ условимся обозначать соответственно через $f'_{\overline{G}}$, $\omega_{\overline{G}}(f, \delta)$ и $\omega_{\overline{G}}(f, \zeta, \delta)$, а контурные — через $f'_{\partial G}$, $\omega_{\partial G}(f, \delta)$ и $\omega_{\partial G}(f, \zeta, \delta)$ (см. ([1])).

Неубывающую, полуаддитивную, положительную при $\delta > 0$ функцию $\omega(\delta)$, удовлетворяющую условию $\omega(+0) = 0$, будем, как обычно, называть **функцией типа модуля непрерывности**.

Считая функцию $f(\zeta)$ непрерывной на $\overline{G}$, поставим вопрос об условиях на множество $G \in \mathfrak{G}$ и функцию $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности, которые бы обеспечивали истинность следующих суждений.

Суждение 1. *Если* $\omega_{\partial G}(f, \delta) \leqslant \omega(\delta)$, *то* $\omega_{\overline{G}}(f, \delta) \leqslant c\omega(\delta)$, $c = \mathrm{const}$.

Суждение 2. *Если в фиксированной точке* $z_0 \in \partial G$ *имеет место неравенство* $\omega_{\partial G}(f, z_0, \delta) \leqslant \omega(\delta)$, *то в этой точке справедлива также оценка* $\omega_{\overline{G}}(f, z_0, \delta) \leqslant c\omega(\delta)$, $c = \mathrm{const}$.

Суждение 3. *Если в точке* $z_0 \in \partial G$ *существует контурная производная* $f'_{\partial G}(z_0)$, *то в этой точке существует и телесная производная* $f'_{\overline{G}}(z_0)$.

Суждение 4. *Если контурная производная* $f'_{\partial G}$ *непрерывна на* ∂G *и* $\omega_{\partial G}(f, \delta) \leqslant \delta\cdot\mathrm{const}$, *то телесная производная* $f'_{\overline{G}}$ *непрерывна на* $\overline{G}$.

Харди и Литтльвуд ([2]) доказали суждение 1 в случае, когда G есть круг, а $\omega(\delta) \equiv \delta^\alpha$, $\alpha > 0$.

В случае, когда G — жорданова область, а $\omega(\delta) \equiv \delta^\alpha$, $\alpha > 0$, Варшавский ([3]) показал справедливость суждения 2, а Уолш и Сьюэлл ([4]) — справедливость суждения 1, причем в обоих указанных результатах $c = 1$ (аналогичные утверждения были установлены также для функции $\omega(\delta)$, которая равна * $\delta \cdot |\log \delta|$ (см. ([5]), стр. 23—24) или $\delta \cdot |\log \delta|^2$ (см. ([6])).

Уолш и Сьюэлл ([4]) доказали также справедливость суждений 3 и 4 в том случае, когда G — жорданова область (а при дополнительном условии, что граница спрямляема и длины малых граничных дуг по порядку совпадают с длинами хорд, условие $\omega_{\partial G}(f, \delta) \leqslant \delta\cdot\mathrm{const}$ в суждении 4 оказывается автоматическим следствием ограниченности $f'_{\partial G}$).

В связи с указанными результатами в монографии Сьюэлла (([5]), стр. 31—32) были поставлены следующие задачи:

1) распространить результаты Варшавского — Уолша — Сьюэлла на более общий класс областей, нежели жордановы области;

---

* Всюду, где δ встречается под знаком логарифма, оно предполагается достаточно малым.

2) доказать аналоги результатов Варшавского — Уолша — Сьюэлла с мажорантами $\omega(\delta)$, отличными от δ^α и $\delta\cdot|\log\delta|$;

3) каков наиболее общий модуль непрерывности $\omega(\delta)$, для которого верно суждение 1 в случае, когда G — жорданова область (или даже жорданова область с аналитической границей)?

В последующие годы в ряде работ были получены частичные результаты при жестких дополнительных ограничениях на область G и функцию $\omega(\delta)$.

В том случае, когда G — жорданова область, а $\omega(\delta) = |\log\delta|^{-p}$, $p>0$, М. Б. Гагуа показал, что справедливо суждение 2, а если к тому же конформное отображение области G на круг и обратное ему отображение на границах соответствующих областей удовлетворяют условию Гёльдера, то верно и суждение 1 (см. [7, 8]); аналогичные результаты были получены [7] и для функций

$$\omega(\delta) = \left|\log^{(n)}\frac{1}{\delta}\right|^{-p},$$

$$\omega(\delta) = \left|\log^{(n)}\frac{1}{\delta}\right|\cdot\left|\log^{(n-1)}\frac{1}{\delta}\right|^{-1}\ldots\left|\log\frac{1}{\delta}\right|^{-1},$$

где $\log^{(k)}$ обозначает k-кратный логарифм). Близкие утверждения, но в менее общих условиях, были ранее получены Л. Г. Магнарадзе [9].

Когда G — единичный круг, $f(\xi)$ — голоморфная в нем функция, непрерывная вплоть до единичной окружности и имеющая на ней как функция дуговой координаты модуль непрерывности $\omega(\delta)$, Я. Л. Геронимус [10, 11] установил оценку $\omega_{\bar G}(f,\ \delta) \leqslant \omega\left(\delta\log\frac{b}{\delta}\right)\cdot\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}>2$, а Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз [12] показали, что если к тому же выполняется условие $\int\limits_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta\to0$, то справедливо суждение 1.

Вопрос о связи между с л а б ы м и производными вдоль замкнутой области и вдоль ее границы для жордановых областей со спрямляемыми и гладкими границами исследован в работе [13].

Во время обсуждения и подготовки к печати моей предыдущей заметки [1], в которой упомянуты результаты Варшавского — Уолша — Сьюэлла, Н. А. Лебедев убедил меня, что следует специально заняться их обобщением. В начале 1971 г. я доказал справедливость суждений 1—4 для произвольного множества $G\in\mathfrak{G}$ и какой угодно функции $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности. Точнее, получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. *Пусть $G\in\mathfrak{G}$; $f(\zeta)$ — функция, непрерывная на $\bar G$ и голоморфная в G; $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности.*

Тогда, если $\omega_{\partial G}(f,\delta)\leqslant\omega(\delta)$, то $\omega_{\bar G}(f,\delta)\leqslant c\,\omega(\delta)$, $c=\mathrm{const}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $G\in\mathfrak{G}$; $f(\zeta)$ — функция, непрерывная на $\bar G$ и голоморфная в G; $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности; z_0 — фиксированная точка на ∂G.*

Тогда, если $\omega_{\partial G}(f, z_0, \delta)\leqslant\omega(\delta)$, то $\omega_{\bar G}(f, z_0, \delta)\leqslant c\,\omega(\delta)$, $c=\mathrm{const}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $G\in\mathfrak{G}$; $f(\zeta)$ — функция, непрерывная на $\bar G$ и голоморфная в G; z_0 — фиксированная точка на ∂G. Если в z_0 существует контурная производная $f'_{\partial G}(z_0)$, то существует и телесная производная $f'_{\bar G}(z_0)$.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $G\in\mathfrak{G}$; $f(\zeta)$ — функция, непрерывная на $\bar G$ и голоморфная в G. Если на ∂G существует непрерывная контурная производная $f'_{\partial G}(z)$, то телесная производная $f'_{\bar G}(\zeta)$ непрерывна на $\bar G$.*

Т е о р е м а 5. *Пусть $G\in\mathfrak{G}$; $h(\zeta)$ — функция, голоморфная и ограниченная в G; $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности; z_0 — фиксированная точка на ∂G.*

Тогда, если при всех $z\in(\partial G)\setminus\{z_0\}$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{\zeta\to z\ (\zeta\in G)}|h(\zeta)|\leqslant\omega(|z-z_0|),$$

то при всех $\zeta \in G$ *имеет место оценка* $|h(\zeta)| \leqslant c\omega(|\zeta - z_0|)$, $c = $ $= \mathrm{const}$.

Теорема 6. *Пусть* $G \in \mathfrak{G}$; $h(\zeta)$ — *функция, голоморфная и ограниченная в* G; z_0 — *фиксированная точка на* ∂G; a — *фиксированное комплексное число.*

Тогда если

$$\lim_{z \to z_0\, (z \in (\partial G) \setminus \{z_0\})} \overline{\lim_{\zeta \to z\, (\zeta \in G)}} \left| \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0} - a \right| = 0,$$

то существует предел

$$\lim_{\zeta \to z_0\, (\zeta \in G)} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_0}$$

(*который, очевидно равен* a).

Теорема 7. *В утверждениях теорем* 1, 2 *и* 5 *в качестве* c *можно взять абсолютную константу* (*например, число* $c = 180$).

Теорема 8. *Если функция* $\omega(\delta)$ *удовлетворяет дополнительному условию, что функция* $\mu(\tau) \equiv \log \omega(e^\tau)$ *вогнута*, то утверждения теорем* 1, 2 *и* 5 *справедливы с константой* $c = 1$.

Замечание 1. Если при условиях теорем 3 и 6 точка $\zeta \in G$ стремится к z_0 таким образом, что величина $|\zeta - z_0|$ по порядку совпадает с расстоянием от ζ до ∂G, то соответственно $f'(\zeta) \to f'_G(z_0)$ и $h'(\zeta) \to a$.

Замечание 2. Изложенные результаты остаются справедливыми при более общих предположениях относительно функции $\omega(\delta)$. Именно, если условие полуаддитивности $\omega(\delta)$ заменить менее ограничительным требованием, чтобы $\omega(\delta)$ имело коэффициент нормальности $\psi(t)$ (определение см. в ([14]), стр. 1349), то утверждения теорем 1, 2, 5 и 8 дословно сохранятся, причем в теоремах 1, 2 и 5 можно положить $c = \psi(90)$.

Замечание 3. Результаты данной работы могут быть обобщены на случай, когда множество G имеет несвязное дополнение, т. е. состоит из многосвязных областей.

Замечание 4. В некоторых из рассмотренных вопросов требование ограниченности множества G не очень существенно или вовсе несущественно. К примеру, справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть функция* $F(\zeta)$ *голоморфна и ограничена в верхней открытой полуплоскости и непрерывна вплоть до вещественной оси. Пусть при вещественных* $x \to \pm\infty$ *функция* $F(x)$ *убывает до нуля со скоростью, не меньшей, чем* $\omega(1/|x|)$, *где* $\omega(t)$ — *функция типа модуля непрерывности.*

Тогда в верхней полуплоскости при $\zeta \to \infty$ *функция* $F(\zeta)$ *убывает не медленнее, чем функция* $\omega(1/|\zeta|) \cdot \mathrm{const}$.

Относительно последнего результата (так же, как и относительно теорем 1, 2 и 5) следует заметить, что функции $\omega(t)$ разрешается убывать при $t \to 0$ как угодно медленно и ей не предписываются никакие аналитические свойства.

Метод, с помощью которого установлены результаты настоящей работы, позволяет получить ряд более общих утверждений.

Приведенные результаты могут быть применены к изучению прямых и обратных задач теории приближения функций, к интегралам типа Коши, к граничным задачам, к эллиптическим дифференциальным уравнениям и в других вопросах анализа. Обсуждение этих приложений выходит за рамки данной заметки, и здесь будут указаны лишь некоторые примеры самых непосредственных применений.

Пример 1. В теории конформных отображений, начиная с работ Келлога, накоплено значительное количество теорем такого сорта: из раз-

* Вогнутость понимается в нестрогом смысле, т. е. при любых τ_1 и τ_2 должно быть $2\mu(\tau_1 + \tau_2) \geqslant \mu(2\tau_1) + \mu(2\tau_2)$. Очевидно, указанному в теореме 8 условию заведомо удовлетворяют функции вида $\omega(\delta) = \delta^\alpha \cdot |\log \delta|^\beta$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, и многие другие.

личных дифференциально-разностных свойств границы области выводятся некоторые утверждения об аналогичных свойствах аналитических характеристик функций, реализующих конформный гомеоморфизм между данной областью и кругом. Однако, если свойства границы задаются в терминах функции типа модуля непрерывности достаточно общего вида, то точные по порядку результаты, как правило, известны только в контурном смысле, а что касается известных в литературе результатов о поведении соответствующих величин вдоль замыкания области (а не только вдоль ее границы), то они не точны по порядку (см., например, ([10], [11])). В указанных случаях результаты настоящей работы позволяют из известных контурных теорем немедленно получать аналогичные телесные теоремы.

Например, пусть G — односвязная жорданова область со спрямляемой границей, и пусть угол $\tau(s)$ между вещественной осью и касательной в точке с дуговой координатой s имеет непрерывную n-ю (n — целое, $n \geqslant 0$) производную $\tau^{(n)}(s)$, обладающую по s модулем непрерывности $\Omega(\delta)$,

$$\int_0^\delta \frac{\Omega(t)}{t}\,dt < +\infty. \tag{1}$$

Пусть $\Phi(\zeta)$ отображает круг $|\zeta| < 1$ на G однолистно и конформно. Тогда, как известно ([10], [11], [15], [16]), на множестве $|\zeta| \leqslant 1$ существует непрерывная телесная производная $\Phi^{(n+1)}(\zeta)$, граничные значения которой $\Phi^{(n+1)}(e^{i\theta})$ на единичной окружности как функция параметра θ имеют модуль непрерывности, мажорируемый величиной вида

$$\left[\int_0^\delta \frac{\Omega(t)}{t}\,dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\Omega(t)}{t^2}\,dt\right]\cdot \mathrm{const}. \tag{2}$$

Применяя теорему 1, легко убедиться, что и телесный модуль непрерывности функции $\Phi^{(n+1)}(\zeta)$ на $|\zeta| \leqslant 1$ мажорируется выражением вида (2).

Пример 2. Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в круге $|\zeta| < 1$, а ее вещественная часть $u(\zeta)$ непрерывна в $|\zeta| \leqslant 1$. Пусть $u(e^{i\theta})$ как функция параметра θ имеет модуль непрерывности $\Omega(\delta)$, удовлетворяющий условию (1). Тогда, как известно ([17]), $f(\zeta)$ непрерывна в $|\zeta| \leqslant 1$, а $f(e^{i\theta})$ как функция параметра θ имеет модуль непрерывности, мажорируемый величиной вида (2).

Теорема 1 показывает, что при указанных условиях функция $f(\zeta)$ имеет на $|\zeta| \leqslant 1$ телесный модуль непрерывности, оцениваемый сверху выражением вида (2).

В заключение отмечу, что основные результаты данной работы были доложены на заседании Ученого Совета Института математики АН УССР 9 III 1971 г. (г. Киев) и на пленарном заседании Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного 6 IX 1971 г. ([18]).

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
19 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. М. Тамразов, ДАН, 198, № 3, 540 (1971). [2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Math. Zs., 34, № 3, 403 (1932). [3] S. Warschawski, Math. Zs., 38, № 5, 669 (1934). [4] J. L. Walsh, W. E. Sewell, Duke Math. J., 6, № 3, 658 (1940). [5] W. E. Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain, Princeton, 1942. [6] J. L. Walsh, W. E. Sewell, H. M. Elliott, Trans. Am. Math. Soc., 67, № 2, 381 (1949). [7] М. Б. Гагуа, Сообщ. АН ГрузССР, 10, № 8, 451 (1949). [8] М. Б. Гагуа, УМН, 8, в. 1 (53), 121 (1953). [9] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 8, № 8, 509 (1947). [10] Я. Л. Геронимус, ДАН, 98, № 6, 889 (1954). [11] Я. Л. Геронимус, Матем. сборн., 38 (80), № 3, 319 (1956). [12] Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, Матем. сборн., 52 (94), № 3, 891 (1960). [13] Е. П. Долженко, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 5, 1069 (1965). [14] Н. А. Лебедев, П. М. Тамразов, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6, 1340 (1970). [15] Ou So-Mo, Scientia Sinica, 7, 131 (1958). [16] S. E. Warschawski, Proc. Am. Math. Soc., 12, № 4, 614 (1961). [17] J. L. Walsh, H. M. Elliott, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38, 1058 (1952). [18] П. М. Тамразов, Всесоюзн. конфер. по теории функций комплексного переменного, Харьков, Тез. докл., 1971, стр. 206.