



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Скиба, О локальных формациях с ограниченным p -разложимым дефектом,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 4, 63–69

<https://www.mathnet.ru/ivm5044>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

29 мая 2025 г., 15:33:44



$$\begin{aligned} & \Rightarrow b_5 b_8, \quad b_{13} = b_5^2 - b_9^2, \quad b_{12} = \frac{b_5 b_5}{b_5 - b_2}, \quad b_{11} = -\frac{b_2 b_4}{b_5 - b_2}, \quad b_{10} = \frac{b_1 b_5}{b_5 - b_2}, \quad b_9 = \\ & = -\frac{F + \lambda_i^2 J_3}{D}, \quad b_8 = \frac{\alpha^2 F + \lambda_i^2 (\alpha^2 J_3 + J_2)}{\alpha^2 D}, \quad b_7 = \frac{\alpha^2 F - k^2 + \lambda_i^2 \alpha^2 J_3}{k^2 \alpha^2 D}, \quad b_6 = \frac{1}{k^2} = \text{const}, \quad b_3 = \\ & = \frac{k^2 + \lambda_i^2 J_2}{k^2 A}, \quad b_2 = \frac{B - \lambda_i^2 J_2}{A}, \quad b_1 = \frac{C + \lambda_i^2 (J_1 + J_2)}{A}. \end{aligned}$$

Дальнейшее решение очевидно, поскольку рассматривается задача определения собственных функций и соответствующих им собственных значений. В результате подстановки выражений (3.15) в оставшиеся равенства (3.14) формируется однородная система алгебраических уравнений относительно C_{in} . Из условия нетривиальности ее решения составляется трансцендентное уравнение для вычисления λ_i ($i = 1, \infty$), и находятся постоянные C_{in} .

Таким образом, при указанных заменах разложения (2.2) с учетом равенств (3.12), (3.15) представляют точное решение исследуемой начально-краевой задачи, существование которого следует из того факта, что эти соотношения удовлетворяют уравнениям (3.1) и условиям (3.3). Следует отметить общность выражений (2.2), (3.12), поскольку решение строилось для произвольной динамической нагрузки, задаваемой функциями $P_\theta(\theta, t)$, $P_z(\theta, t)$, $m(\theta, t)$. При этом необходимо лишь существование интегралов (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований.— Саратов, 1985.—176 с.
2. Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1986.—393 с.
3. Сеницкий Ю. Э. О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований // Дифференц. уравнения.—1983.—Т. 19.— № 9.— С. 1636—1638.
4. Hergman H. Some general orthogonality relations // Trans. ASME, J. Appl. Mech.—1970.—V. 37.— № 3.— P. 132—135.
5. Culikowski P. M., Reismann H. The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading // J. Sound and Vibr.—1971.—V. 14.— № 2.— P. 229—240.
6. Сеницкий Ю. Э. О сходимости разложений, определяемых формулой обращения вырожденного конечного интегрального преобразования / Куйбышев. инж.-строит. ин-т.— Куйбышев, 1986.—9 с.—Библиогр.: 5 назв.—Деп. в ВНИИТИ 05.02.86, № 845—В.
7. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье.— М.: Ин. лит., 1955.—668 с.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— М.: Гостехиздат, 1954.—352 с.

г. Куйбышев

Поступила
15.06.1989

А. Н. Скиба

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ p-РАЗЛОЖИМЫМ ДЕФЕКТОМ

В данной работе рассматривается задача изучения локальной формации конечных групп $\mathfrak{F}$ с помощью некоторой подходящей локальной формации $\mathfrak{H}$. В книге [1] через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}|_n$ обозначена длина n цепи

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

где $\mathfrak{F}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Число $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}|_n$ названо в [1] $\mathfrak{H}$ -дефектом формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что ввиду модулярности решетки локальных формаций (см. следствие 9.22 из [1]) определение $\mathfrak{H}$ -дефекта формации корректно.

Если $\mathfrak{H}$ -дефект достаточно мал, а формация $\mathfrak{H}$ хорошо устроена, то формацию $\mathfrak{F}$ можно изучать, отталкиваясь от свойств формации $\mathfrak{H}$. Например,

если $\mathfrak{F}$ -дефект $\mathfrak{F}$ равен 1, то, как нетрудно заметить, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ — минимальная локальная не $\mathfrak{F}$ -формация, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку теория минимальных локальных не $\mathfrak{F}$ -формаций в настоящее время хорошо разработана, то в данной ситуации $\mathfrak{F}$ — объединение (в решетке локальных формаций) двух известных формаций. Естественным следующим шагом является изучение локальных формаций с $\mathfrak{F}$ -дефектом 2. Первый шаг в этом направлении был сделан в [2], где описаны локальные формации конечных групп с $\mathfrak{N}$ -дефектом (или иначе нильпотентным дефектом) 2. В данной работе мы изучим разрешимые локальные формации конечных групп с p -разложимым дефектом 2. В дальнейшем класс всех конечных p -разложимых групп будем обозначать через $\mathfrak{R}$. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы базируемся на определениях и обозначениях, принятых в [1], [3].

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп. Через $\gamma(\mathfrak{X})$ обозначим совокупность всех таких простых групп, каждая из которых изоморфна некоторому композиционному фактору некоторой группы из $\mathfrak{X}$. Проверка показывает, что справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\gamma(\mathfrak{F}) \cap \gamma(\mathfrak{G}) = \emptyset$. Тогда

$$\text{form}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}) = \text{form} \mathfrak{F} \times \text{form} \mathfrak{G}.$$

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{G}_1$ — минимальная локальная не p -разложимая формация, $\mathfrak{M}$ — некоторая локальная p -разложимая формация. Тогда в формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{G}_1$ не существует минимальных локальных не p -разложимых подформаций, отличных от $\mathfrak{G}_1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}_2$ — произвольная минимальная локальная не p -разложимая формация, входящая в $\mathfrak{F}$. Пусть f, m, h_1 и h_2 — минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{M}, \mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ соответственно. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{G}_1$, то по теореме 8.3 из [1] $f = m \vee h_1$. Кроме того, ввиду следствия 8.4 из [1] имеет место $h_2 \leq f$.

Ввиду п. 18.20 книги [1] $\mathfrak{G}_i = l \text{ form } G_i$, где G_i — такая монолитическая группа, что $p \in \pi(G_i)$ и группа G_i удовлетворяет одному из следующих условий: а) G_i — простая неабелева группа; б) G_i — группа Шмидта; в) $G_i = P_i \rtimes H_i$, где $P_i = C_{G_i}(P_i)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G_i , а H_i — простая неабелева группа и $p \notin \pi(H_i)$. Заметим, что поскольку для любой группы D имеет место $l \text{ form } D = l \text{ form } (D/\Phi(D))$, то в случае п. б) группу G_i можно считать группой Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, т. е. $G_i = R_i \rtimes Q_i$, где R_i и Q_i — силовские подгруппы группы G_i ; группа Q_i имеет простой порядок q_i , $R_i = C_{G_i}(R_i)$ — минимальная нормальная r_i -подгруппа группы G_i .

Как показано в п. 18.20 книги [1], формация всех p -разложимых групп $\mathfrak{R}$ имеет такой внутренний локальный экран t , что $t(p) = \mathfrak{R}_p$ и $t(q) = \mathfrak{G}_p$ при всех простых $q \neq p$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, то $m \leq t$. Значит, $m(q) \subseteq \mathfrak{G}_p$, если q — простое число $\neq p$, и ввиду следствия 8.4 из [1] $m(p) \subseteq \mathfrak{G}$. Значит, $f(p) = \text{form}(G_1/F_p(G_1))$, $f(q) = \text{form}(G_1/F_q(G_1) \cup m(q))$, если $q \in \pi(G_1) \setminus \{p\}$, и $f(l) = m(l)$, если $l \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \pi(G_1)$.

Пусть G_1 — простая неабелева группа. В этом случае $F_q(G) = \{1\}$ при любом $q \in \pi(G)$. Значит, $f(q) = \text{form } G$ — класс групп, всякая неединичная группа которого — прямое произведение изоморфных копий группы G . Пусть G_2 — простая неабелева группа. Тогда, поскольку $G_2 \simeq G_2/F_p(G_2) \in h_2(p) \subseteq f(p)$, то $G_1 \simeq G_2$. Значит, $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$.

Пусть G_2 — группа Шмидта. Если $r_2 = p$, то $G_2/F_p(G_2) \simeq Q \in \text{form } G_1$. Но группа Q_2 абелева. Значит, такой случай невозможен. Пусть $p = q_2$. Тогда $G_2/F_{r_2}(G_2) \simeq Q_2$ — группа порядка p . Но $G_2/F_{r_2}(G_2) \in f(r_2) = \text{form}(\{G_1\} \cup m(r_2))$. Так как $m(r_2) \subseteq \mathfrak{G}_p$, то по лемме 1 $f(r_2) = \text{form } G_1 \times m(r_2)$. Значит, $G_1 \simeq Q_2$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть G_2 удовлетворяет условию в). Тогда $P_2 = F_p(G_2)$. Значит, $H_2 \simeq G_2/F_p(G_2) \in f(p) = \text{form } G_1$ и поэтому $H_2 \simeq G_1$. Но это невозможно, т. к. p не делит $|H_1|$.

Аналогично мы приходим к противоречию и в случае, когда G_1 удовлетворяет одному из случаев б), в).

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная не p -разложимая формация. Тогда по крайней мере одна минимальная локальная не p -разложимая формация входит в $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{R}$, то найдется простое число q такое, что $f(q) \not\subseteq r(q)$, где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, а r — максимальный внутренний локальный экран формации всех p -разложимых групп $\mathfrak{R}$. Пусть A — группа минимального порядка из $f(q) \setminus r(q)$.

Предположим, что $q \neq p$. Ввиду п. 18.20 и следствия 8.6 из [1] $r(p) = \mathfrak{R}_p$ и $r(q) = \mathfrak{G}_p$, при всех простых $q \neq p$. Значит, монолит R группы A является pd -группой. Понятно также, что $R \not\subseteq \Phi(A)$. Предположим, что $R = A$ — группа порядка p . Пусть Q — точный неприводимый $GF(q)[A]$ -модуль. Тогда $Q \times A$ — группа Шмидта и ввиду леммы 8.2 из [1] $Q \times A \in \mathfrak{F}$. Но в силу п. 18.20 из [1] $\text{lform } Q \times A$ — минимальная локальная не p -разложимая формация. Значит, можно считать, что A не является группой порядка p . Если $R = A$ — простая неабелева группа, то в $\mathfrak{F}$ содержится минимальная локальная не p -разложимая формация $\text{lform } A$.

Итак, можно положить $A \neq R$. Пусть R есть p -группа. Тогда поскольку $R \not\subseteq \Phi(A)$, то $R = C_A(R) = F_p(A)$. Но $A \in f(q) \subseteq \mathfrak{F}$, значит, $A/R \in f(p)$. Пусть A/M — простая группа, L — точный неприводимый $GF(p)[A/M]$ -модуль. Тогда ввиду п. 18.20 из [1] $\text{lform } L \times (A/M)$ — минимальная локальная не p -разложимая формация и эта формация входит в $\mathfrak{F}$.

Пусть R — неабелева группа. Тогда $F_p(A) = \{1\}$ и поэтому $A \simeq A/F_p(A) \in f(p)$. Значит, $A/R \in f(p)$, т. е. мы пришли к случаю, который нами уже рассмотрен.

Итак, если найдется такое $q \neq p$, что $f(q) \not\subseteq r(q)$, то лемма верна. Пусть для всех простых $q \neq p$ имеет место $f(q) \subseteq r(q) = \mathfrak{G}_p$. Тогда $f(p) \not\subseteq r(p) = \mathfrak{R}_p$. Легко видеть, что в $f(p) \setminus r(p)$ найдется такая монолитическая группа D с монолитом L , что $O_p(D) = \{1\}$. Пусть L — абелева q -группа, $C = C_D(L)$. Если $C = D$, то ввиду леммы 3.32 из [1] $L \in \text{lform } D \subseteq f(p)$, причем L — простая группа, т. е. мы пришли к ситуации, которая нами рассмотрена выше. Пусть $C \neq D$. По лемме 3.32 из [1] $K = L \times D/C \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $K/F_q(K) \simeq D/C \in f(q) = r(q) \subseteq \mathfrak{G}_p$. Итак, D/C — неединичная p' -группа, следовательно, в $f(p)$ имеется такая простая группа H , что $p \notin \pi(H)$. Такая ситуация нами уже изучена.

Пусть L — неабелева группа, $t \in \pi(L) \setminus \{p\}$. Тогда $D \in f(t) \subseteq \mathfrak{G}_p$. Значит, D есть p' -группа. Пусть D/H — простая группа. Так как $|D/H|$ не делится на p , то мы снова пришли к изученной выше ситуации.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 20.5 книги [1].

Лемма 4. В точности тогда p -разложимый дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ есть p -разложимая локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не p -разложимая формация. При этом: 1) всякая p -разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_1 (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{R})$; 2) всякая не p -разложимая локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_1 (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая приводимая локальная формация. В точности тогда p -разложимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2 \vee \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные не p -разложимые формации;
- 2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация, p -разложимый дефект которой равен 2.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) и пусть f , h_1 , h_2 , m суть p -разложимые дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$.

$\mathfrak{M}$ соответственно. Очевидно, что $m=0$, $h_1=1$, $h_2=1$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 \vee_i \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_1$. Применяв два раза лемму 20.3 из [1], получим, что $f \leq 2$. Снова используя ту же лемму, получим, что p -разложимый дефект формации

$\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2$ не превосходит 2. Он не может быть равным нулю, т. к. $\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{R}$. С другой стороны, он не может быть равен и 1, т. к. не выполняются условия леммы 4. Но по лемме 20.2 из [1] p -разложимый дефект формации $\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2$ не превышает p -разложимый дефект формации $\mathfrak{F}$. Значит, $f=2$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \vee_i \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, p -разложимый дефект которой равен 2, и пусть f, h, m суть p -разложимые дефекты формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}$ соответственно. Тогда $f \leq h + m = 2 + 0$. Понятно, что $f \neq 0$. Кроме того, в силу леммы 4 очевидно, что $f \neq 1$. Остается заключить, что $f=2$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — такая максимальная подформация в $\mathfrak{F}$, p -разложимый дефект которой равен 1. Тогда по лемме 4 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_i \mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{F}_1$ — минимальная локальная не p -разложимая формация. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная не p -разложимая подформация $\mathfrak{F}_2$, отличная от $\mathfrak{F}_1$. Ввиду леммы 2 $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2 = (\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{M}) \vee_i \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2 \vee_i \mathfrak{M}$, т. е. в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Предположим теперь, что в $\mathfrak{F}$ нет минимальных локальных не p -разложимых подформаций, отличных от $\mathfrak{F}_1$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Так как по условию $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$ найдется такая группа G , что $\mathfrak{F}_0 = l \operatorname{form} G \neq \mathfrak{F}$. Действительно, если все собственные локальные подформации формации $\mathfrak{F}$ входят в $\mathfrak{F}_1$, то их объединение совпадает с $\mathfrak{F}_1$. Но $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Значит, найдется такая

собственная локальная подформация $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$, что $\overline{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Поэтому в $\overline{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{F}$ найдется такая группа G , что $\mathfrak{F}_0 = l \operatorname{form} G \neq \mathfrak{F}$. Пусть n есть p -разложимый дефект формации $\mathfrak{F}_0$. Ввиду условия теоремы 1, леммы 20.2 из [1] и того, что p -разложимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$, имеем $n \leq 2$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_0$, то в силу леммы 4 $n \geq 1$. Пусть $n=1$. Тогда $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{M}) \vee_i (\mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{F}_1 \vee_i (\mathfrak{M} \vee_i \mathfrak{M}_1)$. Последнее ввиду леммы 4 противоречит условию. Значит, $n=2$.

Пусть $\mathfrak{F}_0$ — неприводимая локальная формация. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee_i \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_0 \vee_i \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee_i \mathfrak{M}$, т. е. в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\mathfrak{F}_0$ — приводимая локальная формация. Число ее локальных подформаций конечно (см. гл. I книги [1]), т. к. $\mathfrak{F}_0$ является разрешимой однородной локальной формацией. Повторяя соображения, приведенные выше, выберем в формации $\mathfrak{F}_0$ максимальную локальную подформацию $\overline{\mathfrak{F}}_1$, p -разложимый дефект которой равен 1. Тогда получим, что $\overline{\mathfrak{F}}_1 = \mathfrak{F}_1 \vee_i \overline{\mathfrak{M}}$, где $\overline{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{R}$; $\mathfrak{F}_0 = \overline{\mathfrak{F}}_1 \vee_i \overline{\mathfrak{F}}_0$, где $\overline{\mathfrak{F}}_0$ — такая собственная локальная подформация в $\mathfrak{F}_0$, p -разложимый дефект которой равен 2. Пусть формация $\mathfrak{F}_0$ неприводима.

Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee_i \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_0 \vee_i \mathfrak{M} \vee_i \mathfrak{F}_1 = \overline{\mathfrak{F}}_0 \vee_i \overline{\mathfrak{M}} \vee_i \mathfrak{M} \vee_i \mathfrak{F}_1 = \overline{\mathfrak{F}}_0 \vee_i (\overline{\mathfrak{M}} \vee_i \mathfrak{M})$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\mathfrak{F}_0$ — приводимая локальная формация. Тогда, поскольку число локальных подформаций у $\overline{\mathfrak{F}}_0$ меньше, чем число локальных подформаций у $\mathfrak{F}_0$, то по индукции формация $\overline{\mathfrak{F}}_0$ удовлетворяет одному из условий 1), 2). Но в силу доказанного выше случай 1) невозможен. Значит, $\overline{\mathfrak{F}}_0$ удовлетворяет условию 2). Но тогда и $\mathfrak{F}_0$, а следовательно, и $\mathfrak{F}$ удовлетворяют условию 2). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая неприводимая локальная формация. В точности тогда p -разложимый дефект $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F} = l \operatorname{form} G$, где $G = R \rtimes H$ — монолитическая p -группа с монолитом $R = C_G(R)$, и выполняется одно из следующих условий:

1) H — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, причем если p делит $|H|$ и p не делит $|R|$, то в H нормальна силовская p -подгруппа;

2) H — циклическая примарная группа порядка q^2 ;

3) H — группа порядка q^3 нечетной простой экспоненты q .

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, то всякая собственная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$ -формация. Ввиду условия теоремы p -разложимый дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Значит, по лемме 4 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R}$, а $\mathfrak{S}$ — минимальная локальная не p -разложимая формация. Ввиду п. 18.20 из [1] $\mathfrak{S} = l \text{ form } M$, где M — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини порядка, делящегося на p . Ясно, что $M = R \times N$, где R и N — силовские подгруппы в M ; $R = C_M(R)$; $|N|$ — простое число.

Предположим сначала, что $|\pi(\mathfrak{F})| = 2$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$ и согласно следствию 19.10 из [1] $\mathfrak{S}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Значит, по лемме 5 из [2] $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{S}$ — локальная формация с нильпотентным дефектом 1, а поэтому $\mathfrak{F}$ — локальная формация с нильпотентным дефектом 2. Применяя теперь теорему 2 из [2], видим, что $\mathfrak{F} = l \text{ form } G$, где $G = R \rtimes H$ — монолитическая группа с монолитом $R = C(R)$, а H — одна из следующих групп: а) $Q \times N$, где $Q = C_{Q \times N}(Q)$ — минимальная нормальная q -подгруппа в $Q \rtimes N$, N — группа простого порядка $r \in \pi(R)$; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q ; в) циклическая примарная группа порядка q^2 . Заметим, что поскольку формация $\mathfrak{F}$ не p -разложима, то $p \in \pi(G)$. Итак, в рассматриваемом случае формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы.

Будем считать теперь, что $|\pi(\mathfrak{F})| > 2$. Легко показать, что формация $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p \oplus_p \cap \mathfrak{G}_p \mathfrak{R}_p$ имеет такой максимальный внутренний локальный экран t , что $t(p) = \mathfrak{R}_p$ и $t(q) = \mathfrak{G}_p$, при любом простом $q \neq p$. Опишем максимальный внутренний локальный экран l формации $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$. Пусть h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{S}$. Тогда по теореме 8.3 из [1] $h(R) = \text{form } N$, $h(N) = \mathfrak{G}$ и $h(q) = \mathfrak{O}$, если простое число q не принадлежит $\pi(M)$. Согласно лемме 9.15 из [1] $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S} = \langle t \cup h \rangle$. Значит, формация $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$ имеет такой внутренний локальный экран $d = t \vee h$, что $d(N) = t(N)$, $d(R) = \text{form}(\{N\} \cup t(R))$ и $d(q) = t(q)$ при любом простом $q \notin \pi(M)$. Следовательно, по следствию 8.6 из [1] $l(N) = t(N)$, $l(q) = t(q)$ и $l(R) = \mathfrak{R}_{\pi(R)} \text{ form}(\{N\} \cup t(R))$.

Ввиду лемм 20.2 и 20.3 из [1] $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S})$ -формация (ибо $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$). Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда по следствию 18.5 из [1] $\mathfrak{F} = l \text{ form } K$, где K — такая монолитическая группа с монолитом L , что $L = K^{\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}}$ и $f(K)$ — минимальная не $l(K)$ -формация.

Предположим, что группа K p -замкнута. Так как формация $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$ насыщена, то $L \subseteq \Phi(K)$. Значит, найдется такая максимальная подгруппа E в K , что $K = L \times E$. Тогда $C_K(L) = C_K(L) \cap LE = L(C_K(L) \cap E) = L$. Следовательно, L есть p -силовская подгруппа в K . Итак, $f(L) = f(p) = \text{form } K/L = \text{form } E$ — минимальная не $l(p)$ -формация. Предположим, что p делит $|R|$. Тогда $l(p) = \mathfrak{R}_p(\text{form } \{N\} \cup t(p)) = \mathfrak{R}_p \text{ form}(\{N\} \cup \mathfrak{R}_p)$. По лемме 1 $\text{form}(\{N\} \cup \mathfrak{R}_p) = \text{form } N \times \mathfrak{R}_p$. Значит, всякая группа из $\mathfrak{R}_p \text{ form}(\{N\} \cup \mathfrak{R}_p)$ является расширением некоторой группы из $\mathfrak{R}_p$ при помощи некоторой группы из $\text{form } N$. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — максимальная подформация в $f(p)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq l(p)$. Заметим, что K/L есть p' -группа. Значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \text{form } N$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{G}$. Тогда найдется такая простая группа F , что $f(p) = \text{form } F$ и $p \notin \pi(F)$. Пусть $E = P \rtimes F$, где P — точный неприводимый $GF(p)[F]$ -модуль. Тогда по лемме 8.2 из [1] $E \in \mathfrak{F}$. Допустим, что $l \text{ form } E \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $E \in \mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$. Значит, $F \simeq E/F_p(E) \in l(p)$, т. е. $f(p) \leq l(p)$. Но это противоречит тому, что $f(p)$ — минимальная не $l(p)$ -формация. Значит, $l \text{ form } E = \mathfrak{F}$. Очевидно, E — группа Шмидта. Значит, по следствию 19.10 из [1] $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Это противоречит условию. Следовательно, мы должны принять, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{G}$.

Но тогда $\mathfrak{M}_1 = \text{form } N$. Пусть A — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \mathfrak{M}_1$, R — ее монолит. Очевидно, A есть p -группа. Пусть L — точный неприводимый $GF(p)[A]$ -модуль, $G = L \rtimes A$. Понятно, что $\mathfrak{F} = l \text{ form } G$. Так как $|\pi(\mathfrak{F})| > 2$, то $|\pi(A)| > 1$. Значит, $(|R|, |A/R|) = 1$. Это, в частности, означает, что $R \subseteq \Phi(A)$. Но тогда $R = C_A(R)$. Так как $A/R \in \text{form } N$ — абелева группа экспоненты $|N|$, то последнее означает, что $A/R \simeq N$. Теперь нетрудно заметить, что A — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.

Предположим теперь, что p делит $|N|$. Поскольку группа K p -замкнута и класс всех p -замкнутых групп образует локальную формацию, то всякая группа из $\mathfrak{F} = l \text{ form } K$ p -замкнута. Значит, группа M p -замкнута. Но она q -замкнута, где $q \nmid |R|$. Следовательно, группа M нильпотентна, что невозможно. Итак, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть K не p -замкнута. Рассмотрим случай, когда p делит $|R|$. Тогда группа M p -замкнута. Кроме того, p -замкнута формация $\mathfrak{M}_1$. Значит, формация $\mathfrak{M}$ p -замкнута. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — минимальная, локальная, не p -замкнутая формация. Ввиду п. 18.20 из [1] $\mathfrak{F} = l \text{ form } T$, где T — такая монолитическая группа с монолитом $R_1 = C_G(R_1)$, что $(|R|, p) = 1$ и $G = R_1 \rtimes H$, где $H = Q \rtimes N_1$ — такая монолитическая группа с монолитом $Q = C_H(Q)$, что Q есть p -группа, а N_1 — неединичная p' -группа. Понятно, что $T/F_p(T) \simeq N_1 \in l(p) = \mathfrak{N}_p(\text{form } N \times \mathfrak{N}_p)$. Из этого легко получить, что N_1 — абелева группа простой экспоненты q , где $q \in \pi(N)$. Но N_1 — неприводимая группа автоморфизмов группы Q . Значит, $|N_1| = q$. Таким образом, H — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы.

Предположим, что p делит $|N|$. В этом случае $l(N) = l(p) = \mathfrak{N}_p$, $l(R) = \mathfrak{N}_{\pi(R)}(\text{form } N \times \mathfrak{G}_p)$ и $l(q) = \mathfrak{G}_p$, если q — простое число, не принадлежащее $\{p\} \cup \pi(R)$. Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ не p -нильпотентна. Тогда поскольку p -нильпотентны формация $\mathfrak{M}_1$ и группа M , то $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не p -нильпотентная формация. Значит, ввиду п. 18.16 из [1] $\mathfrak{F} = l \text{ form } E$, где $E = A \rtimes B$ — такая монолитическая группа с монолитом $A = C_E(A)$, что A есть p -группа и $B = K_1 \rtimes L$ — монолитическая группа с монолитом $K_1 = C_B(K) \neq B$, причем B/K_1 есть p -группа. Пусть K_1 есть q -группа. По теореме 8.3 из [1] $L \simeq E/F_q(E) \in l(q)$. Так как L есть p -группа с $|L| \neq 1$, то $q \in \pi(R)$. Значит, $l(q) = \mathfrak{N}_q(\text{form } N \times \mathfrak{G}_p)$. Теперь легко доказать, что L — группа порядка p . Значит, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ также удовлетворяет условию теоремы.

Остается рассмотреть случай, когда формация $\mathfrak{F}$ p -нильпотентна. Пусть q такое, что $f(q)$ — минимальная не $l(q)$ -формация и A — группа минимального порядка из $f(q) \setminus l(q)$ с монолитом D . Предположим, что $q = p$. Тогда $f(q) = \mathfrak{G}$. Значит, $f(p) \subseteq l(p) = \mathfrak{N}_p$. Противоречие показывает, что $q \neq p$. Пусть $q \in \pi(R)$, $d \in \pi(D)$. Легко видеть, что $O_q(A) = 1$, т. е. $q \neq d$. Предположим, что $D \subseteq \Phi(A)$. Пусть $E/D = O_q(A/D)$. Согласно лемме 4.2 из [3] $E = E_1 \times E_2$, где $E_1 \in \mathfrak{N}_q$, $(|E_1|, |E_2|) = 1$. Поскольку E_1 — характеристическая подгруппа в E , то E_1 — нормальная в A подгруппа. Но группа A монолитична с монолитом D и $q \notin \pi(D)$. Значит, $E_1 = \{1\}$, т. е. $E = D$. Таким образом, $A/D \in \text{form } N \times \mathfrak{G}_{p'}$. Напомним, что N есть p -группа. Пусть D есть p -группа. Тогда, рассуждая, как и выше, можно показать, что $O_{p'}(A/D) = 1$, т. е. A есть p -группа. Пусть Q_1 — группа порядка q . Тогда $Q_1 \sim A \in \mathfrak{F}$ и $Q_1 \sim A \notin \mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}$, т. к. в противном случае $Q_1 \sim A/F_q(Q_1 \sim A) \simeq A \in l(q)$, что противоречит определению группы A . Значит, $\mathfrak{F} = l \text{ form } Q_1 \sim A$, т. е. $\pi(\mathfrak{F}) = \{p, q\}$. Но этот случай нами исключен выше.

Пусть $d \neq p$. Если $O_p(A/D) = 1$, то A есть p' -группа, а значит, $A \in l(q) = \mathfrak{N}_q(\text{form } N \times \mathfrak{G}_p)$. Получили противоречие. Следовательно, $O_p(A/D) \neq 1$. Пусть $O_p(A/D) = B/D$. Тогда, поскольку $D \subseteq \Phi(A)$, то $B = B_1 \times B_2$, где $B_1 \in \mathfrak{N}_p$, $(|B_1|, |B_2|) = 1$. Это означает, что $O_p(A) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, остается заключить, что $D \subseteq \Phi(A)$, т. е. $A = D \rtimes F$, где F — некоторая максимальная подгруппа группы A . Понятно, что $D = C_A(D)$. Нетрудно показать, что $D \neq A$. Так как $A \in f(q) \subseteq \mathfrak{F}$ и каждая группа из $\mathfrak{F}$

p -нильпотентна, то $p \neq d$. Значит, $l(d) = \mathbb{G}_p$. Так как при этом $A/F_d(A) = A/D \in f(d) \subseteq l(d)$, то $A \in \mathbb{G}_p \subseteq f(q)$. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен.

Пусть $q \notin \pi(M)$. Тогда $l(q) = \mathbb{G}_p$. Так как $A/D \in \mathbb{G}_p$ и $A \notin \mathbb{G}_p$, то D есть p -группа. Но $A \in \mathfrak{F}$ и поэтому группа A p -нильпотентна. Значит, ввиду монолитичности группы A эта группа входит в $\mathfrak{R}_p$. Но как уже было показано ранее, это приводит к противоречию. Этим самым доказательство необходимости завершено.

Достаточность устанавливается прямой проверкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем.— М.: Наука, 1989.—253 с.
2. Скиба А. Н., Таргонский Е. А. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Матем. заметки.— 1987.— Т. 41.— № 4.— С. 490—499.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп.— М.: Наука, 1978.—271 с.

г. Гомель

Поступила
25.05.1989

В. С. Собчук

УДК 514.764

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ РИЧЧИ 4-СИММЕТРИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Риманово пространство V_n называется Риччи m -симметрическим, если выполнено условие $R_{ij, l_1 l_2 \dots l_m} = 0$, где R_{ij} — тензор Риччи, запятая — знак ковариантного дифференцирования. Риччи 2- и 3-симметрические V_n , отличные от пространств Эйнштейна, не допускают нетривиальных геодезических отображений (НГО) [1]. Кроме того, Риччи полусимметрические V_n : $R_{ij, [kl]} = 0$, отличные от пространств Эйнштейна, тензор Риччи которых удовлетворяет условию $R_{ij, l_1 l_2 \dots l_m} = 0$, не допускают НГО [2]. Здесь квадратные скобки в индексах — знак альтернирования.

Теорема. Риччи 4-симметрические V_n , $n > 4$, отличные от пространств Эйнштейна, не допускают НГО.

Доказательство. Допустим, что отличное от пространства Эйнштейна Риччи 4-симметрическое V_n , $n > 4$:

$$R_{ij, klpq} = 0, \quad (1)$$

допускает НГО, т. е. совместна система уравнений

$$a_{ij, k} = \lambda_{(i} g_{j) k}, \quad \lambda_i \neq 0, \quad (2)$$

где круглые скобки — знак симметрирования [3].

Из (1) находим $R_{ij, k[lpq]} = 0$. Отсюда и из (2) следует либо

$$R_{ij, kl} = \alpha g_{ij} g_{kl} + \beta g_{ik} g_{jl} + \gamma g_{il} g_{jk}, \quad (3)$$

либо

$$\lambda_{i, j} = \mu g_{ij}, \quad \mu = \text{const.} \quad (4)$$

Альтернируя (3) по i, j , находим $\gamma = \beta$. Поэтому из (3) получаем, что V_n Риччи полусимметрическое. Отсюда следует, как показано в [1], что имеет место (4).

Вследствие уравнений (4), условий их интегрируемости и их дифференциальных продолжений имеем дифференциальные продолжения условий интегрируемости уравнений (2) в форме [3]:

$$a_{a(i} R_{j) kl, l_1 l_2 l_3 l_4} = \lambda_{(i} T_{j) kll_1 l_2 l_3 l_4}, \quad (5)$$

где обозначено $T_{jkl, l_1 l_2 l_3 l_4} = R_{j, kl, l_1 l_2 l_3 l_4} + R_{j, l_1 kl, l_2 l_3 l_4} + R_{j, l_1 l_2 kl, l_3 l_4} + R_{j, l_1 l_2 l_3 kl, l_4}$. Свертывание (5)

с g^{ll_1} вследствие тождества Бианки и условия (1) дает $\lambda_{(i} T_{j) kll_1 l_2 l_3 l_4} g^{ll_1} = 0$. Так как $\lambda_i \neq 0$, то отсюда получаем $T_{jkl, l_1 l_2 l_3 l_4} g^{ll_1} = 0$, т. е.

$$2R_{j, l_1 l_2 l_3 l_4} + R_{j, l_1 l_2 l_3 l_4} + R_{j, l_1 l_2 l_3 l_4} - R_{kl_2, j l_1 l_4} - R_{kl_3, j l_1 l_4} - R_{kl_4, j l_1 l_4} = 0. \quad (6)$$