Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 519.45 *МАТЕМАТИКА*

Ю. М. ГОРЧАКОВ, Г. П. ЕГОРЫЧЕВ

РАНГИ ФАКТОРОВ НИЖНЕГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДА СВОБОДНОЙ ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 22 X 1971)

Найдены формулы для нахождения минимального числа порождающих элементов для факторов нижнего центрального ряда свободной полинильпотентной группы (см. теорему 2). Для формулировки результатов приведем необходимые определения.

Если F_q, $q \geqslant 2$, — свободная группа ранга q и $\mu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ — последовательность целых чисел $n_k \geqslant 2$, то полинильпотентный ряд группы F строится следующим образом (см. ([1])): $F_1 = F$, $F_{k+1} = \gamma_{n_k}(F_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, здесь $\gamma_n(X) = [\gamma_{n-1}(X), X]$, $\gamma_1(X) = X$, γ_n — n-й член нижнего центрального ряда группы X. Нам нужно уплотнение этого ряда (назовем его плотным полинильпотентным рядом) $F_{0,n_0} = F$, $F_{i,j} = \gamma_j(F_{i-1,n_{i-1}})$, где $i = 1, 2, \ldots$, а $j = 1, 2, \ldots, n_i$. База, построенная в ([2]), несколько неудобна для счета, но похожим способом можно доказать что существует база, в которой коммутаторы упорядочены в соответствии с рядом групп $F_{i,j}$ (см. ([3]), леммы 1 и 7). Эту базу обозначим через S.

Пусть P — множество пар (a, b), где $a = 1, 2, \ldots, b = 1, 2, \ldots, n_a - 1$. Если (a, b) и (c, d) — пары из P, то $(a, b) < (c, d)$ в одном из случаев $a < c$ или $a = c$ и $b < d$. Группы $F_{i,j}$ для однозначности нумерации будем нумеровать парами из P. Порядок пар соответствует убыванию ряда групп $F_{i,j}$. Если $F_{i,j} \supset F_{s,l}$ — два последовательных члена плотного полинильпотентного ряда, то через $S_{i,j}$ обозначим $S \cap (F_{i,j} \setminus F_{s,l})$, а через $S_{i,j}(n)$ — множество коммутаторов из $S_{i,j}$ веса n. Коротко скажем о порядке коммутаторов в S. Если $v \in S_{i,j}(n)$, $w \in S_{k,l}(m)$, то $v < w$, если $(i, j) < (k, l)$ или если $(i, j) = (k, l)$ и $n < m$. Если $v, w \in S_{i,j}(n)$, то порядок любой, лишь бы удовлетворялось определение базисного коммутатора (правильного слова) (см. ([4])).

Пусть $\theta_{i,j}(n)$ — число коммутаторов в $S_{i,j}(n)$, а $n^{(i,j)}$ — минимально возможный вес коммутатора в $S_{i,j}$. Число коммутаторов веса n в базе S, лежащих в $F_i \setminus F_{i+1} = F_{i,j} \setminus F_{i+1,1}$, равно

$$\theta_i(n) = \sum_{t=1}^{n_i-1} \theta_{i,t}(n), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 1. *Числа $n^{(t,j)}$ вычисляются по одной из трех формул:*

1) $q \geqslant 3$ *или* $q = 2$ *и* $\mu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $n_0 = 1$, *где* а) $n_1 \geqslant 4$, б) $n_1 = n_2 = \ldots = n_i = 3$, $n_{i+1} \geqslant 4$, $i > 1$, в) $3 = n_1 = n_2 = \cdots$:

$$n^{(t,j)} = j \prod_{s=0}^{t-1} n_s;$$

2) $q = 2$ *и* $\mu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $n_0 = 1$, *где* а) $n_1 = \cdots = n_i = 3$, $n_{i+1} = 2$, $i > 1$, б) $n_1 = 2$, $n_3 \geqslant 4$, $i = 0$, в) $n_1 = 2$, $n_3 = \cdots = n_f = 3$, $n_{f+1} \geqslant 4$, $f \geqslant 3$, $i = 0$:

$$n^{(t,j)}=\begin{cases} j\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s, & (t,j)\leqslant(i+2,1),\\ j\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s+1, & (i+2,1)<(t,j)<(i+3,1),\\ j\left(\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s+1\right), & (i+3,1)\leqslant(t,j)<(i+4,1),\\ j\left(\prod\limits_{s=0}^{i+2} n_s+1\right)\prod\limits_{p=i+3}^{t-1} n_p, & (i+4,1)\leqslant(t,j); \end{cases}$$

3) $q=2$ и $\mu=(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $n_0=1$, *где* а) $n_1=2$, $n_3=\ldots=n_f=3$, $n_{f+1}=2$, $f\geqslant 3$, б) $n_1=2$, $n_3=2$, $f=2$:

$$n^{(t,j)}=\begin{cases} j\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s, & (t,j)\leqslant(2,1),\\ j\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s+1, & (2,1)<(t,j)<(3,1),\\ j\left(\prod\limits_{s=0}^{t-1} n_s+1\right), & (3,1)\leqslant(t,j)<(4,1),\\ j\left(\prod\limits_{s=0}^{2} n_s+1\right)\prod\limits_{p=3}^{t-1} n_p, & (4,1)\leqslant(t,j)\leqslant(f+2,1),\\ j\left(\prod\limits_{s=0}^{2} n_s+1\right)\prod\limits_{p=3}^{t-1} n_p+1, & (f+2,1)<(t,j)\leqslant(f+3,1),\\ j\left(\left(\prod\limits_{s=0}^{2} n_s+1\right)\prod\limits_{p=3}^{t-1} n_p+1\right), & (f+3,1)<(t,j)<(f+4,1),\\ j\left(\left(\prod\limits_{s=0}^{2} n_s+1\right)\prod\limits_{p=3}^{f+2} n_p+1\right)\prod\limits_{r=f+3}^{t-1} n_r, & (f+4,1)\leqslant(t,j). \end{cases}$$

Под $\operatorname*{Coef}\limits_{(x_1\ldots x_n)^{-1}} A(x_1,\ldots,x_n)\, x_1^{-t_1-1}\ldots x_n^{-t_n-1}$, $t_1,\ldots,t_n=0,1,\ldots,$ понимается коэффициент при $(x_1\ldots x_n)^{-1}$, полученный при умножении ряда $A(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{t_1,\ldots,t_n=0}^{\infty} a_{t_1,\ldots,t_n} x_1^{t_1}\ldots x_n^{t_n}$ на одночлен $x_1^{-t_1-1}\ldots x_n^{-t_n-1}$; v^α и $(1-v^s z^k)^{-\alpha}$ принимаются равными 1, если $\alpha=0$.

Теорема 2. *Следующие формулы позволяют рекуррентно вычислять* $\theta_{i,j}(n)$:

$$\theta_{1,j}(n)=\begin{cases}0, & j\neq n,\quad n=0,1,\ldots,\quad j=0,1,\ldots,n_1-1,\\ q, & j=n=1;\end{cases} \tag{1}$$

$$\theta_{i,0}(n)=\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{n_l-1}\theta_{l,t}(n),\quad i=2,3,\ldots; \tag{2}$$

$$\theta_{i,j}(n)=\begin{cases}0, & n<n^{(i,j)},\\ q\varphi_{i,j-1}(n-1)-\varphi_{i,j-1}(n)-\omega_{i,j}(n), & n\geqslant n^{(i,j)};\end{cases} \tag{3}$$

в последней формуле $i=1$, $j=n$ *и* $i=2, 3, \ldots$, $j=1, 2, \ldots, n_i-1$,

$$\omega_{i,j}(n)=\begin{cases}0 & j=1,\ i=1,2,\ldots,\\ \operatorname*{Coef}_{(vz)^{-1}}\left(\prod_{s=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{\infty}(1-v^sz^k)^{-\theta_{i,s}(k)}z^{-n-1}v^{-j-1}\right) & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$$\varphi_{i,j}(n)=\operatorname*{Coef}_{(vz)^{-1}}\left((1-v)^{-1}\prod_{s=0}^{j}\prod_{k=1}^{\infty}(1-v^sz^k)^{-\theta_{i,s}(k)}z^{-n-1}v^{-j-1}\right).$$

Соотношения (1) — (3) позволяют вычислять ранг $R^{(k)}(n)=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha^{(j)}(n)$ n-го фактора нижнего центрального ряда k-ступенно разрешимой группы с q порождающими элементами ($q\geqslant 2$) по следующим рекуррентным формулам * (решение вопроса 2.18 М. И. Каргаполова из [6]):

$$R^{(k+1)}(n)=R^{(k)}(n)+\alpha^{(k)}(n),\quad k=1,\ 2,\ldots;$$

$$\alpha^{(k)}(n)=\begin{cases}0, & n<n^{(k)}\\ \operatorname*{Coef}_{z^{-1}}\dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}\prod_{j=1}^{\infty}(1-z^j)^{-\alpha^{(i)}(j)}}{z^{n+1}}, & n\geqslant n^{(k)},\end{cases}$$

$$k=1,\ 2,\ldots;$$

$$R^{(1)}(n)=\alpha^{(0)}(n)=\begin{cases}0, & n\neq 1,\\ q, & n=1;\end{cases}$$

$$n^{(k)}=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll}1, & k=0,\\ 2, & k=1,\\ 5, & k=2,\\ 10, & k=3,\\ 21, & k=4,\\ 21\cdot 2^{k-1}, & k\geqslant 5,\end{array}\right\} & \text{при } q=2,\\ 2^k,\quad k\geqslant 0, & \text{при } q\geqslant 3.\end{cases}$$

Эти формулы получаются из (1) — (3), если положить $\mu=(2,\ 2,\ldots)$, $\alpha^{(j)}(n)=\theta_{j+1}(n)$, $n^{(k)}=n^{(k+1,\ 1)}$.

Соотношения (1) — (3) позволяют получить через производящие функции основное соотношение для чисел $\theta(n)$ базисных коммутаторов веса n свободной группы F_q, $q\geqslant 2$:

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-z^k)^{-\theta(j)}=(1-zq)^{-1},$$

из которого сразу получается известная формула Витта (см. например, [7], стр. 189—191). Достаточно положить $\theta(j)=\theta_{1,j}(j)$ и $\mu=(\infty,\ 0,\ 0,\ldots)$.

Институт физики им. Л. В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
22 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Gruenberg, Proc. Am. Math. Soc., 7, № 25, 29 (1957). [2] Л. А. Бокуть, Семинар Алгебра и логика, 2, 4, 13 (1963). [3] Ю. М. Горчаков, В сборн. Алгебра, вложение групп, алгоритмические вопросы, Красноярск, 1970, стр. 32. [4] А. И. Ширшов, Семинар Алгебра и логика, 1, 1, 14 (1962). [5] В. П. Соколов, Семинар Алгебра и логика, 8, 3, 367 (1969). [6] Коуровская тетрадь, 3 изд., Новосибирск, 1969. [7] М. Холл, Теория групп, ИЛ, 1962.

* Публикуются Г. П. Егорычевым в «Сибирском математическом журнале». Более сложные формулы получены В. П. Соколовым в [5] для трехступенно разрешимых групп.