Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 535.14 *ФИЗИКА*

В. А. ДЕМЕНТЬЕВ, Т. Н. ЗУБАРЕВ

ПИЧКОВЫЙ РЕЖИМ В ОДНОМОДОВОМ КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

(Представлено академиком А. П. Александровым 19 VIII 1971)

Трудности, с которыми сталкиваются при анализе общей системы уравнений, описывающих работу квантового генератора (КГ) (см., например, ([1])), объясняют повышенный интерес к рассмотрению в теории КГ важных предельных случаев. Одним из таких предельных случаев является задача о работе одномодового генератора. Анализ уравнений для одномодового генератора был проведен частично в ([2-4]). Однако остался невыясненным ряд особенностей этих уравнений, связанных со структурой фазового пространства вдали от равновесных состояний. Интерес к анализу работы одномодового КГ возрастает в связи с опубликованием экспериментальных данных, указывающих на возможность появления при определенных условиях неустойчивого режима работы («пичковый» режим) одномодового ОКГ ([5]). Результаты этих экспериментов не получили пока ясного теоретического объяснения. В настоящей работе продолжен теоретический анализ одномодовых уравнений. При этом выяснена возможность существования пичкового режима генерации, не связанная с неустойчивостью монохроматического (стационарного) режима работы КГ по отношению к малым возмущениям.

Одномодовый КГ, настроенный на центр линии люминесценции, будем описывать следующей системой укороченных уравнений (эквивалентной уравнениям ([2])) для поля U, поляризации V и инверсной населенности W вещества:

$$\mu U' = -U + V, \tag{1}$$

$$\mu V' = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(-V + UW), \tag{2}$$

$$W' = \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_2}\,\mu\,[(1 - \Omega_{\text{пр}}^{-2})^{-1} - (\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)^{-1}W - UV]. \tag{3}$$

Здесь $U = \left[\dfrac{4\gamma_3}{\gamma_1(1 - \Omega_{\text{пр}}^{-2})}\right]^{1/2} \dfrac{\mathscr{E}_1}{(2\pi n_0 \hbar\omega_0)^{1/2}}$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 e^{-i\omega_0 t} + k_1 c_1$, $\mathscr{E}$ — напряженность электромагнитного поля в резонаторе. Дифференцирование ведется по приведенному времени $\tau = \mu\gamma_3 t$, где $\mu = \left[\dfrac{\gamma_1\gamma_2(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)}{\gamma_3(\gamma_2 + \gamma)}\right]^{1/2}$, $\Omega_{\text{пр}}^2 = \dfrac{2\pi n_0\omega_0}{\hbar\gamma_1\gamma_2}\vartheta^2$ — параметр, характеризующий мощность накачки и обращающийся в 1 при пороговом значении мощности накачки; n_0 — эффективная плотность, ω_0 и ϑ — частота и дипольный момент перехода между рабочими уровнями активных центров люминесценции. Константы γ_1, γ_2 и γ_3 описывают релаксацию элементов матрицы плотности и затухание поля в резонаторе соответственно. Предполагается, что $\gamma_1 \ll \gamma_3$ и выполняется условие генерации $\Omega_{\text{пр}} > 1$.

Система уравнений (1) — (3) имеет стационарные решения

$$U = V = 0, \quad W = \Omega_{\text{пр}}^2, \tag{4}$$

$$\pm U = \pm V = W = 1. \tag{5}$$

Проведенный в ([2], [3]) анализ показывает, что при выполнении условия генерации точка (4) является седлом, а характер точек (5) зависит от величины параметра накачки. Особый интерес представляет анализ критического случая, не рассмотренного в ([2], [3]), когда

$$\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1)\mu^2 = \gamma_1(\gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_1). \tag{6}$$

При этом уравнения в вариациях для точек (5) имеют чисто мнимые корни, и вопросы устойчивости должны решаться членами следующего порядка. Такой анализ, как известно, определяет практическую устойчивость монохроматической работы КГ. Проведенный нами расчет показывает, что на границе (6) точки (5) практически неустойчивы. В соответствии с этим следует искать неустойчивые предельные циклы в области $\gamma_3(\gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1)\mu^2 < \gamma_1(\gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_1)$, разлагая $U \pm 1$ и период решения ϑ^{-1} в ряд по $\varepsilon^{1/2}$ и полагая $\varepsilon = [\gamma_1(\gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_1) + \mu^2(\gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_3] \times \times \gamma_2[\mu^2(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_1)\gamma_3]^{-1}$. Заменяя в уравнениях (1) — (3) τ на $\tau(1 - h_2\varepsilon + \ldots)$ и выполняя вычисления до третьего порядка по $\varepsilon^{1/2}$, находим при $\mu \ll 1$ для амплитуды и частоты предельного цикла

$$U \pm 1 = \varepsilon^{1/2} c \cos \tau (1 - h_2\varepsilon + \ldots) + \ldots, \tag{7}$$

$$\vartheta = \frac{\mu\gamma_3}{2\pi}(1 - h_2\varepsilon + \ldots), \tag{8}$$

$$c^2 = \frac{2(\gamma_2 + \gamma_3)^4}{\mu^2\gamma_2\gamma_3(9\gamma_3^2 + 2\gamma_2\gamma_3 - 3\gamma_2^2)}, \quad h_2 = \frac{c^2}{6}. \tag{9}$$

Более полный анализ структуры фазового пространства уравнений одномодового КГ удается провести в пределе больших накачек *

$$\mu^{-1} \ll 1. \tag{10}$$

В этом случае исходные уравнения (1) — (3) перепишем в виде

$$U' = v - \mu^{-1}U, \tag{11}$$

$$v' = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(Uw - \mu^{-1}v), \tag{12}$$

$$w' = \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_2}\left\{- Uv + \mu^{-1}\left[(1 - \Omega_{\text{пр}}^{-2})^{-1} - \frac{\gamma_2\gamma_1}{\gamma_3(\gamma_2 + \gamma_3)}w\right]\right\}. \tag{13}$$

Система уравнений (11) — (13) при $\mu^{-1} = 0$ имеет два первых интеграла

$$-C_1 = U^2 + 2\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_3}w, \tag{14}$$

$$C_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_3}v^2 + \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_3}\right)^2 w^2, \tag{15}$$

т. е. фазовое пространство расслаивается. Каждый слой представляет параболический цилиндр (14). Если $C_1 < 0$, то фазовое пространство (14) напоминает фазовое пространство консервативной системы с двумя связанными потенциальными ямами: сепаратрисная траектория

$$C_2^1 = 4C_2 \tag{16}$$

отделяет траектории, на которых U сохраняет знак, от траекторий, на которых U меняет знак. При $C_1 > 0$ нет траекторий, сохраняющих знак U. Чтобы изучить медленные движения перейдем к новым переменным: интегралам движения C_1, C_2. Таким образом, мы отделяем быструю фазовую переменную ψ, описывающую движение по траекториям (14), (15), от медленных переменных C_1, C_2. Итак, усредняя уравнения (11) — (13) по ψ, приходим к системам уравнений (17), (18) и (19), (20) при $4C_2 < C_1^2$ и $4C_2 > C_1^2$ соответственно:

$$C_1' = -\mu\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3} - 2\right)(-C_1 + 2\sqrt{C_2})\frac{E}{K} + 2 + \frac{\gamma_1}{\gamma_3}C_1\right\}, \tag{17}$$

* Мы не предполагаем далее, что $\gamma_1 \ll \gamma_3$.

$$C_2' = \frac{1}{3}\,\mu\left\{\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3}\,C_1-3\right)\left[\left(-C_1+2\sqrt{C_2}\right)\,\frac{E}{K}\,+C_1\right]-2\,\frac{\gamma_1+2\gamma_2}{\gamma_3}\,C_2\right\}, \tag{18}$$

$$C_1' = \mu\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-2\right)\left[2\sqrt{C_2}\left(2\,\frac{E}{K}-1\right)\,-C_1\right]+2+\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\,C_1\right\}, \tag{19}$$

$$C_2' = \frac{2}{3}\,\sqrt{C_2}\,\mu\left\{2\,\frac{E}{K}\,\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3}\,C_1-3\right)+\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_3}\,C_1-\frac{2\gamma_2+\gamma_1}{\gamma_3}\,\sqrt{C_2}+3\right\}, \tag{20}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго родов. Модулем этих интегралов при $4C_2 < C_1^2$ является $4\sqrt{C_2}/(-C_1+2\sqrt{C_2})$, а при $4C_2 > C_1^2$ — обратная ей величина.

Фазовое пространство медленных движений состоит из двух секторов, лежащих на плоскости C_1, C_2 (см. рис. 1). Уравнениям (17), (18) соответствует сектор, ограниченный полупрямой

$$C_2 = 0, \quad C_1 < 0 \tag{21}$$

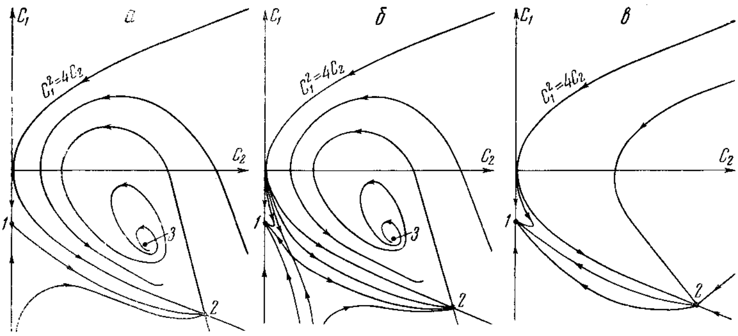

Рис. 1. Фазовое пространство системы уравнений (17) — (20) медленных движений одномодового КГ при больших накачках (10): a — $\gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_1$, $б$ — $3\gamma_3 - 2\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 - \gamma_1$, $в$ — $\gamma_2 > 3\gamma_3 - 2\gamma_1$

и параболой (16). фазовое пространство системы (19), (20) лежит внутри параболы (16), причем граничные кривые (16), (21) также являются траекториями медленных движений. На параболе (16) находится стационарное состояние систем уравнений (17), (18) и (19), (20) (точка *2* на рис. 1):

$$C_1 = -2\gamma_3/\gamma_1, \quad C_2 = {}^1\!/_4 C_1^2. \tag{22}$$

Если $\gamma_2 > 3\gamma_3 - 2\gamma_1$, то стационарное состояние (22) представляет устойчивый узел со стороны параболического сектора и седло в секторе, ограниченном кривыми (16), (21). Если $\gamma_2 < 3\gamma_3 - 2\gamma_1$, то ситуация обращается. На полупрямой (21) лежит стационарное состояние системы (17), (18) (точка *1* на рис. 1):

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 0, \tag{23}$$

являющееся седлом, если $\gamma_2 < \gamma_3 - \gamma_1$, и устойчивым узлом при $\gamma_2 > \gamma_3 - \gamma_1$.

Система уравнений (17), (18) имеет неустойчивое состояние равновесия (седло) при $\gamma_3 - \gamma_1 < \gamma_2 < 3\gamma_3 - 2\gamma_1$ (точка *4* на рис. 1*б*), уравнения (19), (20) — устойчивое состояние равновесия (фокус) (точка *3* на рис 1*а*, *б*), если $\gamma_2 < 3\gamma_3 - 2\gamma_1$. Эти состояния лежат на кривой

$$C_2 = \gamma_3^2\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3}\,C_1-3\right)\,(C_1+1)\Big/\,[(2\gamma_2+\gamma_1)(2\gamma_3-\gamma_1)]. \tag{24}$$

Седло отщепляется от положения равновесия (23) при $\gamma_2 = (\gamma_3 - \gamma_1) + 0$ и входит в стационарное состояние (22) при $\gamma_2 =$

$= (3\gamma_3 - 2\gamma_1) - 0$. Фокус возникает из состояния (22) при $\gamma_2 = (3\gamma_3 - 2\gamma_1) - 0$. Предельных циклов в секторе, ограниченном (16) и (21), нет, следовательно, его разбиение на ячейки установлено. Если отбросить маловероятный случай, что в параболическом секторе есть полуустойчивый цикл или несколько циклов различной устойчивости, окружающих фокус, то качественная структура разбиения этого сектора на траектории также фиксируется.

Состояние (22) описывает петлю сепаратрисы стационарного состояния $U = v = 0$, $w = \gamma_3(\gamma_2 + \gamma_3) / (\gamma_2\gamma_1)$ системы (11) — (13), т. е. до начала генерации КГ находится в окрестности этого состояния. Состояние (23) дает монохроматический режим генерации КГ. Стационарное состояние уравнений (17) — (20), лежащее внутри параболического сектора (точка *3* на рис. 1), определяет устойчивый предельный цикл исходной системы: КГ в таком режиме излучает пички с частотой следования

$$\vartheta = \frac{[\gamma_2\gamma_1(\Omega^2_{\text{пр}} - 1)\sqrt{C_2}]^{1/2}}{4K}. \tag{25}$$

Константа C_2 в формуле (25) определяется выражением (24), C_1 находится приравниванием правой части уравнения (19) нулю.

Таким образом, приведенный выше анализ показывает, что существование пичкового режима работы КГ может быть связано не с неустойчивостью стационарных решений по отношению к малым возмущениям, а с ситуацией в окрестности петли сепаратрисы (22), т. е. с неустойчивостью к большим возмущениям. Как показывают предыдущие вычисления (см. формулы (7) — (9)), эти качественные результаты не являются привилегией больших накачек.

Поступило
5 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. М. Беленов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, Тр. Физич. инст. им. П. Н. Лебедева АН СССР, Квантовая радиофизика, **52**, 237 (1970). [2] А. В. Успенский, Радиотехника и электроника, **8**, 7, 1165 (1963). [3] А. С. Гуртовник, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, **1**, № 5—6, 83 (1958). [4] А. З. Грасюк, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, **9**, 3, 524 (1964). [5] М. И. Джибладзе, Т. М. Мурина, А. М. Прохоров, ДАН, **182**, № 5, 1048 (1968).