

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

НЕТ «НАИВНОГО» ПРИМЕРА НЕСЕПАРАБЕЛЬНОГО СЕКВЕНЦИАЛЬНОГО БИКОМПАКТА СО СВОЙСТВОМ СУСЛИНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 X 1971)

И. Юхас (I. Juhasz) показал, что в некоторой модели теории множеств каждый бикомпакт с первой аксиомой счетности и условием Суслина сепарабелен ⁽⁹⁾ (наша терминология и обозначения — те же, что и в ⁽¹⁾); напомним только, что пространство со свойством Суслина — это такое пространство, в котором каждое дизъюнктное семейство непустых открытых множеств счетно).

Мной установлено ⁽⁴⁾, что в той же модели теории множеств справедливо

Утверждение (А): *Бикомпакт наследственно сепарабелен, если и только если каждое его дискретное подпространство счетно.*

Легко видеть, требование счетности всех дискретных подпространств пространства X равносильно ограничению: каждое подпространство пространства X удовлетворяет условию Суслина.

Область, к которой относятся эти результаты, исключительно богата нерешенными вопросами. Формулировки многих из этих вопросов замечательно просты и могут быть восприняты без приготовлений самой широкой математической аудитории.

Так, неизвестно, каждый ли бикомпакт, в котором все дискретные подпространства счетны, имеет мощность, не большую чем $2^{\aleph_0}$ (этот вопрос поставлен Хайналом и Юхасом, см. ⁽⁹⁾)?

Каждый ли бесконечный бикомпакт содержит либо нетривиальную сходящуюся последовательность, либо топологическую копию βN -стоунчеховского расширения натурального ряда (вопрос поставлен Б. А. Ефимовым)?

Каждое ли вполне регулярное пространство, в котором все дискретные подпространства счетны, во всех точках (или хотя бы в одной) имеет счетный псевдохарактер (возможно, в такой общности вопрос ставится впервые)?

Этот ряд вопросов можно легко продолжить, но мы здесь остановимся, отослав читателя к статьям ^(2, 3, 6), в которых сформулированы другие проблемы из этой области.

Наша цель — доказать утверждение, вынесенное в заглавие этой статьи. Данным результатом, вместе с утверждением (А), устанавливаются наиболее широкие на настоящий момент границы обобщения теоремы Тенненбаума ⁽⁸⁾ о совместимости с системой Цермело — Френкеля аксиом теории множеств утверждения, что каждый линейно упорядоченный бикомпакт, подчиненный условию Суслина, сепарабелен.

Существует (см. ⁽⁷⁾) модель теории множеств, в которой выполняются следующие положения:

$$(I) \quad 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} < 2^{\aleph_2}.$$

(II) Если пространство X удовлетворяет условию Суслина, то каждое несчетное семейство непустых открытых в X множеств содержит несчетное централизованное подсемейство.

Обозначим через M некоторую такую модель.

Теорема 1. В M каждый секвенциальный бикомпакт, подчиненный условию Суслина, сепарабелен.

Доказательство. Мы предполагаем противное и фиксируем секвенциальный бикомпакт X , для которого $c(X) = \aleph_0$ и $s(X) \geq \aleph_1$. Дальнейшее рассуждение имеет два этапа: на первом мы находим в X бикомпакт F такой, что $c(F) = \aleph_0$ и $s(F) = \aleph_1$, а на втором строим несчетное семейство непустых открытых в F множеств, в котором нет никакого несчетного центрированного подсемейства. Заключение здесь противоречие со свойством (II) модели M завершает рассуждение.

1°. В (1) доказано, что мощность каждого секвенциального бикомпакта со свойством Суслина не превосходит $2^{\aleph_0}$. Отсюда и из свойства (I) модели M мы заключаем, что $|X| < 2^{\aleph_1}$.

По известной теореме Чеха — Поспишила (см. (3)), множество $P = \{x \in X: \chi(x, X) \leq \aleph_1\}$ всюду плотно в X (иначе в силу (I) было бы $|X| \geq 2^{\aleph_1} > |X|$).

Для построения бикомпакта $F \subset X$ с нужными нам свойствами ($c(F) = \aleph_0$ и $s(F) = \aleph_1$) достаточно предположить, что никакое счетное подмножество множества P не плотно в X .

Для каждого непустого подмножества E множества P зафиксируем точку $c(E) \in E$. Далее, пусть, для каждого $x \in P$, $\lambda_x = \{O_\alpha(x) : \alpha < \aleph_1\}$ — база точки x в пространстве X . Определим по индукции семейство $\{Q_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ подмножеств множества P следующим образом. Выберем $x_0 \in P$ произвольно и положим $Q_0 = \{x_0\}$. Пусть $\beta < \aleph_1$ и для каждого $\alpha < \beta$ определено счетное множество $Q_\alpha \subset P$. Положим

$$R_\beta = \bigcup \{Q_\alpha : \alpha < \beta\}, \quad \mathcal{C}_\beta = \{O_\alpha(x) : x \in R_\beta \text{ и } \alpha < \beta\},$$

$$S_\beta = \{c(U \cap V \cap P) : U \in \mathcal{C}_\beta, \quad V \in \mathcal{C}_\beta \text{ и } U \cap V \neq \Lambda\}.$$

Ясно, что R_β , $\mathcal{C}_\beta$ и S_β — счетные множества, причем $S_\beta \subset P$.

В силу предположения о плотности пространства X $[R_\beta \cup S_\beta] \neq X$. Следовательно, $P \setminus [R_\beta \cup S_\beta] \neq \Lambda$. Выберем произвольно $x_\beta \in P \setminus [R_\beta \cup S_\beta]$ и положим $Q_\beta = R_\beta \cup S_\beta \cup \{x_\beta\}$. Таким образом множества Q_α можно определить для всех $\alpha < \aleph_1$. Пусть это сделано. Семейство $\{Q_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ удовлетворяет тогда следующим условиям:

- i₁) $|Q_\alpha| \leq \aleph_0$ для всех $\alpha < \aleph_1$;
- i₂) $Q_\alpha \subset Q_\beta$, если $\alpha < \beta < \aleph_1$;
- i₃) $Q_\alpha \subset P$ для всех $\alpha < \aleph_1$;
- i₄) $[Q_\alpha] \not\subset Q_\beta$, если $\alpha < \beta < \aleph_1$.

Положим $Q = \bigcup \{Q_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ и $F = [Q]$. В силу i₁) и i₄) $|Q| = \aleph_1$. Значит, $s(F) \leq \aleph_1$.

Рассмотрим произвольное счетное множество A , содержащееся в F , и покажем, что $[A] \neq F$. Это будет означать, что $s(F) = \aleph_1$. Бикомпакт F секвенциален и имеет, следовательно, счетную тесноту (4). Из $A \subset [Q]$ поэтому следует, что для каждой точки $a \in A$ можно выбрать счетное множество $L(a) \subset Q$ так, чтобы было $a \in [L(a)]$. Положим $L = \bigcup \{L(a) : a \in A\}$. Тогда $[L] \supset A$ и, значит, $[L] \supset [A]$. Теперь достаточно установить, что $[L] \neq X$. Но из $L \subset Q$ и $|L| \leq \aleph_0$ следует, что $L \subset Q_{\alpha^*}$ для некоторого $\alpha^* < \aleph_1$. Тогда $[L] \subset [Q_{\alpha^*}]$, причем в силу i₄) $[Q_{\alpha^*}] \not\subset Q_{\alpha^*+1}$. Тем более, $[L] \not\subset Q_{\alpha^*+1}$. Но $Q_{\alpha^*+1} \subset Q \subset F$. Значит, $[L] \neq F$. Итак, доказано, что $s(F) = \aleph_1$.

Установим, что $c(F) = \aleph_0$. Так как $F = [Q]$, достаточно доказать соотношение $c(Q) = \aleph_0$.

Семейство $\mathcal{B} = \{O_\alpha(x) \cap Q : x \in Q \text{ и } \alpha \in \aleph_1\}$ — база пространства Q . Если в Q есть несчетное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств, то в Q есть такое семейство, состоящее из элементов базы $\mathcal{B}$. Итак, достаточно исследовать следующую ситуацию: Для каждого $\alpha < \aleph_1$ заданы точка $x_\alpha \in Q$ и ординал $\beta(\alpha) < \aleph_1$ таким образом, что семейство $\{Q \cap O_{\beta(\alpha)} x_\alpha :$

$\alpha < \aleph_1$ дизъюнктно (здесь $O_{\beta(\alpha)}x_\alpha$ — элемент с номером $\beta(\alpha)$ семейства λ_{x_α} , зафиксированного в начале рассуждения). Покажем, что и семейство $\{O_{\beta(\alpha)}x_\alpha: \alpha < \aleph_1\}$ тогда дизъюнктно. Предположим противное. Пусть $\alpha' < \aleph_1$ и $\alpha'' < \aleph_1$ таковы, что $O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \cap O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''} \neq \Lambda$. Так как $x_{\alpha'} \in Q$ и $x_{\alpha''} \in Q$, найдутся $\alpha^* < \aleph_1$ и $\alpha^{**} < \aleph_1$, для которых $x_{\alpha'} \in Q_{\alpha^*}$ и $x_{\alpha''} \in Q_{\alpha^{**}}$. Положим $\bar{\alpha} = \max\{\beta(\alpha'), \beta(\alpha''), \alpha^*, \alpha^{**}\}$ и $\beta^* = \bar{\alpha} + 1$. Тогда $\beta^* < \aleph_1$ и $x_{\alpha'}, x_{\alpha''} \in R_{\beta^*}$, $O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \in \mathfrak{S}_{\beta^*}$, $O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''} \in \mathfrak{S}_{\beta^*}$. Так как $O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \cap O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''}$ — непустое открытое в X множество, а P всюду плотно в X , $E^* = O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \cap O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''} \cap P$ — непустое подмножество множества P . Следовательно, $c(E^*) \in S_{\beta^*} \subset Q_{\beta^*} \subset Q$. Получаем

$$\begin{aligned} & (O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \cap Q) \cap (O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''} \cap Q) = \\ & = (O_{\beta(\alpha')}x_{\alpha'} \cap O_{\beta(\alpha'')}x_{\alpha''}) \cap Q \supset E^* \cap \{c(E^*)\} \neq \Lambda \end{aligned}$$

— противоречие с предположением о дизъюнктности семейства $\{O_{\beta(\alpha)}x_\alpha: \alpha < \aleph_1\}$. Значит, семейство $\{O_{\beta(\alpha)}x_\alpha: \alpha < \aleph_1\}$ дизъюнктно. Но оно несчетно, что противоречит условию $c(X) = \aleph_0$. Значит, $c(Q) = \aleph_0$ и $c(F) = \aleph_0$. Первый этап нашего рассуждения завершен.

2°. Секвенциальный бикомпакт F , для которого $c(F) = \aleph_0$ и $s(F) = \aleph_1$, в модели M существовать не может (построенный выше бикомпакт F секвенциален, ибо он является замкнутым подпространством секвенциального пространства). Это частный случай соответствующего общего утверждения о бикомпактах счетной тесноты, доказанного в (4), теорема 4.

Теорема 1 доказана.

Мы уже отмечали, что каждый секвенциальный бикомпакт, удовлетворяющий условию Суслина, имеет мощность не большую, чем $2^{\aleph_0}$. Поэтому теорему 1 можно рассматривать как специализацию следующего утверждения.

Теорема 2. Если X — бикомпакт счетной тесноты, $c(X) = \aleph_0$ и $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, то в модели M $s(X) \leq \aleph_0$.

Проведенное выше рассуждение, очевидно, является доказательством и теоремы 2.

Однако действительно ли теорема 2 является более общим утверждением, чем теорема 1? Мы не знаем этого, ибо не знаем ответа на вопрос, каждый ли бикомпакт счетной тесноты секвенциален?

После теорем 1 и 2 естественно спросить: возможен ли «наивный» пример несепарабельного бикомпакта мощности $2^{\aleph_0}$ или меньшей, подчиненного условию Суслина? Гипотезу о существовании такого бикомпакта можно рассматривать, как чрезвычайное расширение гипотезы о существовании континуума Суслина. Тем более кажется удивительным, что неизвестен ответ на этот вопрос. Более того нет, по-видимому, примера бикомпакта X , для которого $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, $c(X) = \aleph_0$ и $s(X) > \aleph_0$. Может быть, в некоторых моделях сепарабелен каждый бикомпакт X , для которого $c(X) = \aleph_0$ и $w(X) \leq 2^{\aleph_0}$ (I. Juhász)?

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2, 255 (1970). ² А. В. Архангельский, Тр. матем. Конгр. в Нице, 1970. ³ А. В. Архангельский, Тр. III пражского Симпозиума по общей топологии и ее применениям, Прага, 1971. ⁴ А. В. Архангельский, ДАН, 199, № 6 (1971). ⁵ E. Čech, V. Pospíšil, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 258, 1 (1938). ⁶ A. Hajnal, I. Juhász, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, Preprint. ⁷ D. A. Martin, R. M. Solovay, Ann. Math. Logic, 2, 143 (1970). ⁸ S. Tennenbaum, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 59, 60 (1968). ⁹ I. Juhász, A. Verbeek, N. S. Kroonenberg, Mathematical Centre Tracts, 34, Amsterdam, 1971.