Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 4

УДК 517.53 МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

К ОБОБЩЕННЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ КОШИ, ШВАРЦА И ПУАССОНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 2 XII 1971)

М. М. Джрбашяном ([1]) построен обобщенный оператор $L^{(\omega)}$ типа Римана — Лиувилля, с помощью которого им установлены ([1]) обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной функцией $\omega = \omega(x) \in \Omega$. Вслед за тем автором ([2–5]) был получен ряд обобщенных формул Коши, Шварца и Пуассона. В настоящей заметке мы несколько остановимся на операторной стороне теории этих обобщенных интегральных формул.

1. Пусть функции $\omega_j = \omega_j(x) \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\tilde{\omega}_{\tilde{j}} = \tilde{\omega}_{\tilde{j}}(x) \in \Omega$, $\tilde{j} = 1, 2, \ldots, \tilde{m}$. Пусть далее $p_j(0) = 1$,

$$\tilde{p}_{\tilde{j}}(0) = 1,\ p_j(r) = r\int_r^1 \frac{\omega_j(x)}{x^2}\,dx,\ \tilde{p}_{\tilde{j}}(r) = r\int_r^1 \frac{\tilde{\omega}_{\tilde{j}}(x)}{x^2}\,dx,\ r \in (0, 1],$$

$$\Delta_0^{(j)} = 1,\ \tilde{\Delta}_0^{(\tilde{j})} = 1,$$

$$\Delta_k^{(j)} = -(k+1)\int_0^1 r^k dp_j(r) = k\int_0^1 r^{k-1}\omega_j(r)\,dr,$$

$$\tilde{\Delta}_k^{(\tilde{j})} = -(k+1)\int_0^1 r^k d\tilde{p}_{\tilde{j}}(r) = k\int_0^1 r^{k-1}\tilde{\omega}_{\tilde{j}}(r)\,dr,$$

$j = 1, 2, \ldots, m$; $\tilde{j} = 1, 2, \ldots, \tilde{m}$; $k = 1, 2, \ldots$ *

2. Пусть функция

$$f(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (re^{i\varphi})^k \tag{1}$$

голоморфна в круге $|z| < R$, а функция

$$u(re^{i\varphi}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi)\, r^k \tag{2}$$

---

* В ([1]) введена функция $p(r) = r\int_r^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx$, $\omega(x) \in \Omega$, $r \in (0, 1]$, $p(0) = 1$, и последовательность чисел $\Delta_k = -(k+1)\int_0^1 r^k dp(r)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, при этом показано, что все числа Δ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, положительны, причем $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

гармоническая в круге $|z| < R$ (α_0, α_k, β_k — действительные числа).

Автором ([2]) построен оператор $L^{(\omega_1, \ldots, \omega_m)}$ (кратко $L^{(\omega)}$) и показано ([2, 3]), что функция

$$L^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})] = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)} a_k (re^{i\varphi})^k$$

голоморфна в круге $|z| < R$, а функция

$$L^{(\omega)}[u(re^{i\varphi})] = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)} \alpha_k \cos k\varphi - \Delta_k^{(1)} \ldots \Delta_k^{(m)} \beta_k \sin k\varphi) r^k$$

гармоническая в круге $|z| < R$.

Так как функция (1) голоморфна в круге $|z| < R$, а функция (2) гармоническая в круге $|z| < R$, то, как следует из формулы Коши — Адамара, функции

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Delta_k^{(j)}} (re^{i\varphi})^k, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

голоморфны в круге $|z| < R$, а функции

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k^{(j)}} \cos k\varphi - \frac{\beta_k}{\Delta_k^{(j)}} \sin k\varphi \right) r^k, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

гармонические в круге $|z| < R$.

3. Для функций (1), (2), как функций r, введем оператор $M^{(\omega_j)}$ следующим образом:

$$M^{(\omega_j)}[f(re^{i\varphi})] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Delta_k^{(j)}} (re^{i\varphi})^k,$$

$$M^{(\omega_j)}[u(re^{i\varphi})] = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{\Delta_k^{(j)}} \cos k\varphi - \frac{\beta_k}{\Delta_k^{(j)}} \sin k\varphi \right) r^k.$$

Введем еще операторы $M^{(\omega_1, \ldots, \omega_m)}$ (кратко $M^{(\omega)}$) и $N^{(\omega_1, \ldots, \omega_m; \widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_m)}$ (кратко $N^{(\omega; \widetilde{\omega})}$):

$$M^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})] = M^{(\omega_m)}[M^{(\omega_{m-1})} \ldots [M^{(\omega_1)}[f(re^{i\varphi})]] \ldots],$$
$$N^{(\omega; \widetilde{\omega})}[f(re^{i\varphi})] = M^{(\widetilde{\omega})}[L^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})]]$$

(то же при замене $f(re^{i\varphi})$ на $u(re^{i\varphi})$).

Легко видеть, что справедливы тождества

$$L^{(\omega)}[M^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})]] = M^{(\omega)}[L^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})]] = f(re^{i\varphi})$$

(то же при замене $f(re^{i\varphi})$ на $u(re^{i\varphi})$).

Следовательно, в классах голоморфных и гармонических в круге функций операторы $L^{(\omega)}$ и $M^{(\omega)}$ взаимно обратны. Нетрудно видеть, что в тех же классах функций взаимно обратны и операторы $N^{(\omega; \widetilde{\omega})}$ и $N^{(\widetilde{\omega}; \omega)}$ *.

4. Автором ([2]) введены функции $C(z;\ \omega_1, \ldots, \omega_m)$, $S(z;\ \omega_1, \ldots, \omega_m)$, $P(\varphi, r;\ \omega_1, \ldots, \omega_m)$ (кратко $C(z;\ \omega)$, $S(z;\ \omega)$, $P(\varphi, r;\ \omega)$). С учетом введенных выше операторов легко видеть, что $C(re^{i\varphi};\ \omega)$, $S(re^{i\varphi};\ \omega)$, $P(\varphi, r;\ \omega)$ есть $M^{(\omega)}[C(re^{i\varphi})]$, $M^{(\omega)}[S(re^{i\varphi})]$, $M^{(\omega)}[P(\varphi, r)]$,

где

$$C(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad S(z) = \frac{1 + z}{1 - z}, \quad P(\varphi, r) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}.$$

* Оператор $N^{(\widetilde{\omega}; \omega)}$ определяется аналогично оператору $N^{(\omega; \widetilde{\omega})}$.

Поэтому установленные в ([2]) обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной системой функций $\omega_j(x) \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, m$, перепишутся соответственно в виде

$$\underset{|z|<\rho}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{(\omega)}\left[C\left(e^{-i\theta}\frac{re^{i\varphi}}{\rho}\right)\right] L^{(\omega)}\,[f(\rho e^{i\theta})]\,d\theta, \quad z = re^{i\varphi},$$

$$\underset{|z|<\rho}{f(z)} = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{(\omega)}\left[S\left(e^{-i\theta}\frac{re^{i\varphi}}{\rho}\right)\right] \mathrm{Re}\, L^{(\omega)}\,[f(\rho e^{i\theta})]\,d\theta,$$

$$z = re^{i\varphi},$$

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{(\omega)}\left[P\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}\right)\right] L^{(\omega)}\,[u(\rho e^{i\theta})]\,d\theta,$$

$$0 \leqslant r < \rho, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

В обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона, установленные в ([3-5]), входят функции вида $C_{(\tilde{\omega})}(z;\omega)$, $S_{(\tilde{\omega})}(z;\omega)$, $\boldsymbol{P}_{(\tilde{\omega})}(\varphi, r;\omega)$, $f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$, $u_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$, $f_{(\omega)}^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$. С учетом рассмотренных выше операторов легко видеть, что $C_{(\tilde{\omega})}(re^{i\varphi};\omega)$, $S_{(\tilde{\omega})}(re^{i\varphi};\omega)$, $P_{(\tilde{\omega})}(\varphi, r;\omega)$, $f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$, $u_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$, $f_{(\omega)}^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta};\tilde{\omega})$ есть соответственно $N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}[C(re^{i\varphi})]$, $N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}[S(re^{i\varphi})]$, $N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}[P(\varphi, r)]$, $N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}[f(\rho e^{i\theta})]$, $N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}[u(\rho e^{i\theta})]$, $N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}[f^{(\alpha)}(\rho e^{i\theta})]$. Поэтому, например, найденные в ([3]) обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, которые будем называть обобщенными формулами Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированными с данными системами функций $\omega_j(x) \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $\tilde{\omega}_{\tilde{j}}(x) \in \Omega$, $\tilde{j} = 1, 2, \ldots, \tilde{m}$, перепишутся соответственно в виде

$$\underset{|z|<\rho}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}\left[C\left(e^{-i\theta}\frac{re^{i\varphi}}{\rho}\right)\right] N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}\,[f(\rho e^{i\theta})]\,d\theta,$$

$$z = re^{i\varphi},$$

$$\underset{|z|<\rho}{f(z)} = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}\left[S\left(e^{-i\theta}\frac{re^{i\varphi}}{\rho}\right)\right] \mathrm{Re}\, N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}\,[f(\rho e^{i\theta})]\,d\theta,$$

$$z = re^{i\varphi},$$

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega};\,\omega)}\left[P\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}\right)\right] N^{(\omega;\,\tilde{\omega})}\,[u(\rho e^{i\theta})]\,d\theta,$$

$$0 \leqslant r < \rho, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Подобно этому надлежащим образом перепишутся как обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, установленные в ([4]), так и обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, установленные в ([5]).

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
26 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, № 5, 1075 (1968). [2] И. И. Баврин, ДАН, **187**, № 3 (1969). [3] И. И. Баврин, ДАН, **194**, № 2 (1970). [4] И. И. Баврин, ДАН, **198**, № 5 (1971). [5] И. И. Баврин, ДАН **202**, № 1 (1972).