Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 513.88+517.948 *МАТЕМАТИКА*

С. Ю. РОТФЕЛЬД

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАВАЕМЫХ ДВОЙНЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VII 1971)

В работе вычислен главный член асимптотики собственных чисел операторов вида

$$Q = \Phi T = \int\limits_K \int\limits_K \theta(\mu - \lambda) E(d\mu) T E(d\lambda), \tag{1}$$

действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Здесь θ — положительно-однородная порядка $\alpha > 0$ эрмитова функция в R^m, C^∞-гладкая вне начала координат, $K \subset R^m$ — ограниченное измеримое множество, $E(\cdot)$ — ортогональная спектральная мера в $\mathscr{H}$, заданная на K, T — самосопряженный оператор класса $\mathfrak{S}_p$, $p = m(m+\alpha)^{-1}$.

Теория операторов вида (1) разработана в ([1]), где указаны также применения этой теории к различным задачам анализа. В частности, теория вольтерровых операторов с мнимой компонентой того или иного класса ([2]) естественным образом вкладывается в схему двойных операторных интегралов (1).

И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн доказали важную теорему об асимптотике спектра вещественной компоненты вольтеррова оператора с ядерной мнимой компонентой T (([2]), гл. VII). Эта теорема эквивалентна вопросу об асимптотике спектра оператора Q при $K = [0, 1]$ и $\theta(\lambda) = i \operatorname{sign} \lambda$. Заметим, что для этой функции $\alpha = 0$.

Мы рассматриваем однородные функции порядка $\alpha > 0$ и показываем, что для них имеет место соответствующий аналог теоремы И. Ц. Гохберга — М. Г. Крейна. Последнюю теорему, таким образом, можно трактовать как предельный случай для ряда рассмотренных задач. Отметим, однако, что сама теорема И. Ц. Гохберга — М. Г. Крейна не следует из наших результатов.

Доказательство приводимых в заметке результатов следует схеме статьи ([3]). В ([3]) получена асимптотика собственных чисел симметричных интегральных операторов $\tilde{Q}$ вида

$$(\tilde{Q}u)(x) = \int\limits_K \theta(x-y) T(x, y) u(y) \sigma(dy) \tag{2}$$

с гладкими ядрами $T(x, y)$, действующих в $L_{2,\sigma}^{(r)}(K)$ — пространстве квадратично суммируемых на K по мере σ вектор-функций размерности $r < \infty$.

В настоящей заметке аналогичный вопрос рассмотрен для существенно более общих абстрактных операторов вида (1). Мы применяем новый способ получения точных оценок сингулярных чисел оператора Q, основанный на результатах нашей работы ([4]) о ненормируемых идеалах кольца ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Нужные нам при этом оценки спектра модельных интегральных операторов взяты из ([5]). При выводе формулы для асимптотики мы опираемся на результаты ([3]) об операторах (2).

2. Через $\{s_k(A)\}_{k=1}^\infty$ (соответственно $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$) обозначается последовательность сингулярных (собственных) чисел вполне непрерывного опе-

ратора A. Класс операторов A, у которых $\|A\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(A) < +\infty$ $(p > 0)$, обозначен через $\mathfrak{S}_p$. Как показано в ([4]), при $p < 1$ $\mathfrak{S}_p$ — $\mathfrak{F}$-пространство с метрикой $\|A_1 - A_2\|_p^p$. Нам потребуются некоторые результаты о представлении ядерных операторов интегральными (см. ([6])). Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}$ разложено в прямой интеграл гильбертовых пространств

$$\mathscr{H} = \int_K \oplus\, \mathfrak{H}_\lambda \sigma(d\lambda) \tag{3}$$

так, что проектору $E(\Delta)$ $(\Delta \subset K)$ отвечает оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_\Delta(\lambda)$ множества Δ. Тогда ядерному оператору T отвечает в разложении (3) оператор-функция (регуляризованное ядро) $T(\lambda, \mu): \mathfrak{H}_\lambda \to \mathfrak{H}_\mu$, которое определено при σ-п.в. λ и σ-п.в. μ. В частности, при σ-п.в. λ определено диагональное значение ядра $T(\lambda, \lambda)$.

Лемма 1. *Если $T \in \mathfrak{S}_p$, $p \leqslant 1$ то при σ-п. в. λ $T(\lambda, \lambda) \in \mathfrak{S}_p$ и*

$$\int_K \|T(\lambda, \lambda)\|_p^p \sigma(d\lambda) \leqslant \|T\|_p^p. \tag{4}$$

3. Теорема 1. *Пусть $T \in \mathfrak{S}_p$, $p = m(m+\alpha)^{-1}$.*
Тогда

$$\sup_n n^{1/p} \cdot s_n(Q) \leqslant C\|T\|_p, \quad C = C(\theta). \tag{5}$$

При $q > m(m+\alpha)^{-1}$ преобразование Φ: $T \to Q$ непрерывно действует в $\mathfrak{S}_q$.

Основную роль при доказательстве теоремы 1 играет неравенство

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \lambda^{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k(A)}{1 + \lambda s_k(A)} \asymp \sup_n n \cdot s_n^p(A) \tag{6}$$

(знак $\asymp$ означает двустороннюю оценку). Функционал в левой части (6) определяет метрику в множестве операторов A, у которых $\sup n \cdot s_n^p(A) < +\infty$ (см. ([4])). Тем самым доказательство теоремы 1 сводится к проверке оценки (5) на одномерных операторах $T = (\cdot, \varphi)\varphi$, $\|\varphi\| = 1$. Для таких операторов T неравенство (5) (с постоянной C, не зависящей от φ) следует из результатов ([5]).

Пусть

$$\tilde{\theta}(\xi) = \lim_{r \to \infty} \int_{|x| \leqslant r} (1 - |x|^2 r^{-2})^s \theta(x) e^{-ix\xi} dx$$

(s достаточно велико), $\gamma_\pm(\theta) = (2\pi)^{-m} \operatorname{mes}\{\xi: \pm\tilde{\theta}(\xi) > 1\}$ ([3]). Пусть $N_t^\pm(Q) = \sum_{\lambda_i^\pm(Q) \geqslant t} 1$, $t > 0$, — функция распределения положительной и отрицательной частей спектра самосопряженного оператора Q. Имеет место

Теорема 2. *Пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_p$, $p = m(m+\alpha)^{-1}$.*
Тогда существует

$$\lim_{t \to 0} t^p N_t^\pm(Q) = \varkappa_\pm(T). \tag{7}$$

Постоянные $\varkappa_\pm(T)$ могут быть вычислены по формулам

$$\varkappa_\pm(T) = \gamma_\pm(\theta) \int_K \operatorname{Sp}[T_+^p(\lambda, \lambda)] \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^p d\lambda - \gamma_\mp(\theta) \int_K \operatorname{Sp}[T_-^p(\lambda, \lambda)] \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^p d\lambda. \tag{8}$$

В (8) $T_\pm(\lambda, \lambda)$ — положительная и отрицательная части диагонального значения регуляризованного ядра оператора T в разложении (3). Сходимость интегралов в (8) обеспечена неравенством (4). Отметим, что в (8) входит только абсолютно непрерывная часть спектральной меры $E(\Delta)$. Формула (8) для интегральных операторов (2) была получена в ([3]).

Замечание 1. В теореме существенно, что показатель однородности $\alpha > 0$. Попытка применить наш метод для получения теоремы И. Ц. Гохберга — М. Г. Крейна (случай $\alpha = 0$, $m = 1$) дает лишь следующий более слабый результат.

Пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_q$, $q < 1$, и

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 i \operatorname{sign}(\mu - \lambda) E(d\mu) TE(d\lambda).$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0} tN_t^{\pm}(Q) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \| E(d\lambda) TE(d\lambda) \|_1. \tag{9}$$

Напомним, что в теореме И. Ц. Гохберга — М. Г. Крейна доказано существование предела (9) для $T \in \mathfrak{S}_1$.

Теорема 3. *Пусть $F(\cdot)$, $E(\cdot)$ — две спектральные меры на K, $T \in \mathfrak{S}_p$, $p = m(m+\alpha)^{-1}$ и*

$$Q = \int_K \int_K \theta(\mu - \lambda) F(d\mu) TE(d\lambda).$$

Тогда существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/p} s_n(Q)$.

Для этого предела можно написать формулу, аналогичную (8), которую мы здесь не приводим.

4. Из теоремы 2 вытекает следующий результат для интегральных операторов.

Теорема 4. *Пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_p$, $p = m(m+\alpha)^{-1}$ — интегральный оператор в $L_2^{(r)}(K^m)$* (K^m — единичный куб),

$$(Tu)(x) = \int_{K^m} T(x, y) u(y)\, dy, \tag{10}$$

и Q — интегральный оператор в $L_2^{(r)}(K^m)$ с ядром $Q(x, y) = \theta(x-y) T(x, y)$.

Тогда

$$\lim_{t\to 0} t^p N_t^{\pm}(Q) = \lim_{\delta\to 0} \left\{ \gamma_{\pm}(\theta) \int_{K^m} \operatorname{Sp}[T_{\delta+}^p(x, x)]\, dx + \gamma_{\mp}(\theta) \int_{K^m} \operatorname{Sp}[T_{\delta-}^p(x, x)]\, dx \right\}, \tag{11}$$

$$T_\delta(x, y) = \delta^{-2m} \int_{\Delta_x(\delta)} \int_{\Delta_y(\delta)} T(t, s)\, dt\, ds,$$

$\Delta_x(\delta)$ — куб с центром в x и ребром δ. Если ядро $T(x, y)$ непрерывно, то в (11) можно выполнить предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 4 обобщает результаты ([3]). Условия гладкости в ([3]), наложенные на ядро $T(x, y)$, заведомо обеспечивают принадлежность оператора T нужному классу $\mathfrak{S}_p$.

5. Из теоремы 2 непосредственно следуют результаты для тригонометрической проблемы множителей в l_p (см. ([1])). Пусть K^m — единичный куб в R^m и функция $\zeta(x) \in C^\infty(R^m)$, $\zeta(x) = 1$, $x \in K^m$; $\zeta(x) = 0$, $x \notin \pi K^m$. Через $\theta_1(x)$ обозначим периодическое продолжение функции $\zeta(x)\theta(x)$ на R^m. Пусть $c = \{c_k\} \in l_p$ $(k = (k_1, \ldots, k_m))$ и $f(x) = \sum\limits_k c_k e^{ikx}$, $x \in R^m$.

Рассмотрим последовательность $d = \{d_k\}$ коэффициентов Фурье $\theta_1(x) \cdot \cdot f(x)$. Преобразование Ψ: $c \to d$ называется преобразованием множителей. Через $\tilde{d}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обозначаем перестановку чисел $|d_k|$ в невозрастающем порядке.

Теорема 5. *Пусть* $c = \{c_k\} \in l_p$, $p = m(m + \alpha)^{-1}$, $d = \Psi_c$. *Тогда существует конечный* $\lim_{n \to \infty} n^{1/p} \tilde{d}_n$. *При* $q > m(m + \alpha)^{-1}$ *оператор* Ψ *непрерывно действует в* l_q.

В заключение автор выражает благодарность М. Ш. Бирману и М. З. Соломяку за внимание к работе.

Центральный научно-исследовательский
и проектно-конструкторский институт
по проектированию оборудования для
целлюлозно-бумажной промышленности
Ленинград

Поступило
29 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Сборн. Проблемы математической физики, в. 1, 33 (1966); в. 2, 26 (1967). [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1967. [3] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6, 1142 (1970). [4] С. Ю. Ротфельд, Сборн. Проблемы математической физики, в. 3, Л., 1968, стр. 81. [5] Г. П. Костометов, М. З. Соломяк, Вестн. ЛГУ, № 1 (1971). [6] М. Ш. Бирман, С. Б. Энтина, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 2, 401 (1967).