A. N. Skiba, On factorizations of compositional formations, *Mat. Zametki*, 1999, Volume 65, Issue 3, 389–395

https://www.mathnet.ru/eng/mzm1062

Математические заметки

том 65 выпуск 3 март 1999

УДК 512.44

О ФАКТОРИЗАЦИЯХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А. Н. Скиба

Доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – однопорожденная композиционная формация, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ – композиционная формация.

Библиография: 14 названий.

Все рассматриваемые группы конечны.

Напомним, что *формации* – это классы групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация групп $\mathfrak{F}$ называется (*разрешимо*) *насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G, обладающая (разрешимой) нормальной подгруппой N такой, что $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$. Формации такого типа наиболее широко используются в различных приложениях теории формаций. Отметим, что непустые насыщенные формации называют *локальными*, а непустые разрешимо насыщенные формации – *композиционными*. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ непустых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – это класс $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$, где $G^{\mathfrak{H}}$ – пересечение всех ядер эпиморфизмов группы G на группы из $\mathfrak{H}$.

Хорошо известно (см., например, [1], [2]), что произведение любых двух локальных формаций является локальной формацией. В работах В. А. Ведерникова [3] и Н. Т. Воробьёва [4] были построены первые примеры локальных формаций вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где оба сомножителя $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – нелокальные формации. В то же время если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – однопорожденная локальная формация (т.е. $\mathfrak{F}$ – пересечение всех локальных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G) и $\mathfrak{F}$ не является атомом решетки локальных формаций, то $\mathfrak{M}$ – локальная формация [5].

В данной работе мы покажем, что аналогичный результат для композиционных формаций неверен. Таким образом, ответ на вопрос 12.74 из [6] отрицателен. Мы докажем, тем не менее, что верна следующая

Теорема 1. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – однопорожденная композиционная формация, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ – композиционная формация.*

Для доказательства теоремы 1 мы воспользуемся некоторыми наблюдениями и техникой работы [5]. Кроме того, нам будет необходимо следующее, восходящее к Л. А. Шеметкову [7], [8] и Р. Бэру, описание композиционных формаций.

Пусть $K(\mathfrak{X})$ – класс всех простых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$. Функция f, сопоставляющая каждой элементарной группе H некоторую (возможно пустую) формацию $f(H)$, называется *бэровской формационной функцией* [9, с. 370] или *композиционным экраном* [7], [8], если $f(A) = f(B)$ для любых двух элементарных групп A и B с $K(A) = K(B)$.

Через $\mathrm{CL}(f)$ обозначим класс всех групп G, для которых $G \in \mathrm{CL}(f)$ тогда и только тогда, когда либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$ для каждого главного фактора H/K из G. Если $\mathfrak{F} = \mathrm{CL}(f)$, то говорят, что f – композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме Бэра (см. [9, с. 373]) непустая формация $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщенна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{CL}(f)$ для некоторого композиционного экрана f.

Пусть A – произвольная простая группа. Тогда обозначим [10] через $F_A(G)$ пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы изоморфны A (если же таких факторов нет, то полагаем $F_A(G) = G$), через $O_A(G)$ наибольшую нормальную в G подгруппу, у которой все композиционные факторы изоморфны группе A (при этом $O_A(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Все остальные используемые нами определения и обозначения стандартны и при необходимости их можно найти в [9], [11], [12].

Лемма 1. *В том и только том случае $\mathfrak{F}$ – однопорожденная композиционная формация, когда в $K(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное множество неизоморфных групп и $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний композиционный экран f, все непустые значения которого являются однопорожденными формациями.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$. Тогда по теореме работы [10] $K(\mathfrak{F}) = K(G)$ и $\mathfrak{F}$ имеет внутренний композиционный экран f такой, что $f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G))$ для всех $A \in K(G)$.

Достаточность. Пусть $\{A_1, \dots, A_t\}$ – набор всех попарно неизоморфных простых групп в $K(\mathfrak{F})$, f – внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$ такой, что $f(A_i) = \mathrm{form}\, G_i$, $i = 1, \dots, t$. Не теряя общности, мы можем считать, что $A_i = Z_{p_i}$ – группа простого порядка p_i при всех $i = 1, \dots, n$ и $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_t$ – неабелевы группы. Пусть $B_i = Z_{p_i} \,\mathrm{wr}\, G_i$, $i = 1, \dots, n$. Пусть

$$G = B_1 \times \dots \times B_n \times G_{n+1} \times \dots \times G_t,$$

$\mathfrak{M} = \mathrm{cform}\, G$ и h – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{M}$. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Поскольку экран f внутренний, то $G_{n+1}, \dots, G_t \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, в силу теоремы и следствия 2 работы [10] $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Для доказательства обратного включения достаточно установить, что $l \leqslant h$, где l – минимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$.

Если $i \in \{n+1, n+2, \dots, t\}$, то по теореме 3.2 из [11]

$$l(A_i) \subseteq f(A_i) = \mathrm{form}\, G_i \subseteq \mathfrak{M} = h(A_i).$$

Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$, $p = p_i$ и K_i – база сплетения B_i. Легко видеть (см. доказательство леммы 2 в [10]), что $F_{Z_p}(B_i) = O_{Z_p}(B_i) = K_i O_p(G_i)$. Значит,

$$B_i/F_{Z_p}(B) = K_i G_i / K_i O_p(G_i) \cong G_i/O_p(G_i) \in h(Z_p).$$

Следовательно, $G_i \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p)$. Поэтому

$$l(Z_p) \subseteq f(Z_p) = \operatorname{form} G_i \subseteq h(Z_p).$$

Итак, $l(A) \leqslant h(A)$ для всех $A \in K(\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ – однопорожденная композиционная формация. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы см. [12, с. 82].

Лемма 2. *Пусть $A \in \operatorname{form} G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $K(A) \subseteq K(G)$;
2) *каждый главный фактор группы A изоморфен некоторому главному фактору группы G*;
3) *ступени нильпотентных секций группы A не превосходят наибольшую из ступеней нильпотентных секций группы G*;
4) *экспонента группы A делит экспоненту группы G.*

Теорема 1 непосредственно вытекает из следующей леммы, которая также показывает, что класс формаций, поставляющих отрицательный ответ на вопрос 12.74 из [6], весьма узок.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – однопорожденная композиционная формация. Тогда если формация $\mathfrak{M}$ не является композиционной, то выполняются следующие утверждения*:

1) *все абелевы группы из $K(\mathfrak{F})$ имеют один и тот же порядок p*;
2) $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \operatorname{cform} G$ и $|G| = m$. Обозначим через f минимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. В дальнейшем для произвольной группы A через A^m мы обозначаем группу $A \times A \times \cdots \times A$, где число сомножителей равно m.

Поскольку по условию формация $\mathfrak{M}$ не является композиционной, найдется группа $A \notin \mathfrak{M}$ такая, что $A/\Phi(N) \in \mathfrak{M}$ для некоторой разрешимой нормальной подгруппы N из A. Кроме того, понятно, что $\mathfrak{M} \neq (1) \neq \mathfrak{H}$.

Покажем прежде, что каждая простая группа T из $\mathfrak{M}$ абелева. Предположим противное, и пусть T – произвольная простая неабелева группа из $\mathfrak{M}$. Рассмотрим сплетение $D = T \operatorname{wr}(B^m)$, где B – некоторая неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Пусть K – база этого сплетения. Тогда согласно лемме 1 работы [5] группа D монолитична и ее монолит совпадает с

$$K = \prod_{b \in B^m} T_1^b,$$

где T_1 – первая копия группы T в K. Понятно, что $D \in \mathfrak{F}$. Значит, по теореме работы [10]

$$D \cong D/C_D(K) \in f(K) = \operatorname{form}\bigl(G/F_T(G)\bigr) \subset \operatorname{form} G.$$

Но $|K| = |T|^{|B|^m} > m$, что противоречит лемме 2. Таким образом, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ является абелевой.

Обозначим через B факторгруппу $A/\Phi(N)$. Пусть $I \neq D \in \mathfrak{H}$, $F = B \operatorname{wr} D$ и K – база сплетения F. Пусть B_1 – первая копия группы B в K. Предположим, что $F^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в

$$K = \prod_{\alpha \in D} B_1^{\alpha}.$$

Тогда $F^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Значит, $F \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть $G_1 = A \operatorname{wr} D$, K_1 – база сплетения G_1 и A_1 – первая копия группы A в K_1. Пусть N_1 – нормальная разрешимая подгруппа группы A_1, соответствующая подгруппе N в A, и $L = \Phi(N_1)$. Существует такой эпиморфизм $\varphi\colon G_1 \to F$, ядро которого R совпадает с

$$\prod_{\alpha \in D} L^{\alpha}.$$

Но, как нетрудно заметить, $R = \Phi(E)$, где

$$E = \prod_{\alpha \in D} N_1^{\alpha}.$$

Значит, $G_1/\Phi(E) \in \mathfrak{F}$ и поэтому $G_1 \in \mathfrak{F}$. Последнее означает, что $G_1^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Заметим, что $F^{\mathfrak{H}} = (G_1^{\mathfrak{H}})^{\varphi}$, $K_1^{\varphi} = K$ и $F^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в K. Следовательно, $G_1^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в

$$K_1 = \prod_{\alpha \in D} A_1^{\alpha}.$$

Таким образом, группа $G_1^{\mathfrak{H}}$ имеет нормальную подгруппу M такую, что $G_1^{\mathfrak{H}}M \cong A_1$. Значит, $A \cong A_1 \in \mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что для любой неединичной группы $D \in \mathfrak{H}$ $\mathfrak{H}$-корадикал группы $F = B \operatorname{wr} D$ не входит подпрямо в базу сплетения F. Согласно лемме 1 работы [5] группе D можно сопоставить собственную нормальную подгруппу M_D группы B такую, что $(B/M_D) \operatorname{wr} D$ – гомоморфный образ группы $F/F^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$.

Зафиксируем теперь некоторую неединичную группу D из $\mathfrak{H}$ и рассмотрим бесконечную последовательность

$$G_1 = (B/M_D) \operatorname{wr} D, \quad G_2 = (B/M_{G_1}) \operatorname{wr} G_1, \quad \dots, \quad G_t = (B/M_{G_{t-1}}) \operatorname{wr} G_{t-1}, \quad \dots . \tag{1}$$

Из сказанного выше в предыдущем абзаце следует, что все группы последовательности (1) принадлежат формации $\mathfrak{H}$.

Найдутся простое число p и бесконечная последовательность индексов $i_1, i_2, \dots$ такие, что при любом $j = 1, 2, \dots$ имеет место $p \in \pi(B/M_{G_{i_j}})$. Пусть Z – некоторая группа порядка p, и

$$T_1 = Z, \quad T_2 = Z \operatorname{wr} T_1, \quad \dots, \quad T_{n+1} = Z \operatorname{wr} T_n, \quad \dots .$$

Покажем, что для любого i найдется j такое, что группа T_i изоморфна подгруппе G_j. Пусть $i > 1$ и существует j такое, что группа T_{i-1} изоморфна подгруппе G_j. Найдется номер $t > j$ такой, что $p \in \pi(B/M_{G_t})$, т.е. Z изоморфна подгруппе из B/M_{G_t}. Но тогда $T_i = Z \operatorname{wr} T_{i-1}$ изоморфна подгруппе из $G_{t+1} = (B/M_{G_t}) \operatorname{wr} G_t$ (см. [13, с. 74]).

Итак, при всяком натуральном i найдется натуральное число j такое, что T_i изоморфна подгруппе из G_j. Пусть теперь P – произвольная p-группа, l – длина ее композиционного ряда. Применяя теорему Калужнина–Краснера (см. [13, с. 75]) и тривиальную индукцию, видим, что группа P изоморфна подгруппе группы T_l. Значит, для каждой p-группы P найдется число j такое, что P изоморфна подгруппе из $G_j \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq S(\mathfrak{H})$.

Значит, в $\mathfrak{H}$ найдется такая группа T, у которой одна из ее подгрупп M является циклической группой порядка p^m и каждая минимальная нормальная подгруппа группы T является p-группой.

Понятно, что группа Z_p порядка p принадлежит $\mathfrak{F}$. Предположим, что во множестве $K(\mathfrak{F})$ имеется группа Z_q простого порядка $q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{F}$. Легко видеть, что для любого простого числа r такого, что $Z_r \in \mathfrak{F}$, имеет место $\mathfrak{N}_r = (\mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{M})(\mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{H})$. Значит, если $r \in \pi(\mathfrak{F})$, то в силу [14] либо $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{H}$. Рассмотрим следующие формально возможные случаи.

1) $Z_p \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть H – циклическая группа порядка q^m и $D = Z_p \operatorname{wr} H = K \leftthreetimes H$, где K – база сплетения D. Тогда, поскольку $K = F_{Z_p}(D)$ и $D \in \mathfrak{F}$, имеем

$$D/F_{Z_p}(D) \cong H \in f(Z_p) = \operatorname{form}\bigl(G/F_{Z_p}(G)\bigr) \subseteq \operatorname{form} G,$$

что противоречит лемме 2.

2) $Z_p, Z_q \notin \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть P – произвольная простая группа из $\mathfrak{M}$. В силу доказанного выше P – абелева r-группа, где r – простое число, отличное от q. Таким образом, по-существу, мы пришли к случаю 1).

3) $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{M}$. Рассмотрим сплетение $D = Z_q \operatorname{wr} T = K \leftthreetimes T$, где K – база сплетения D. Так как, очевидно, $F_{Z_q}(D) = K$, в $D/F_{Z_q}(D)$ имеется циклическая подгруппа порядка p^m. Но

$$D/F_{Z_q}(D) \in f(Z_q) = \operatorname{form}\bigl(G/F_{Z_q}(G)\bigr) \subseteq \operatorname{form} G,$$

что противоречит лемме 2. Следовательно, данный случай также невозможен. Из всего сказанного заключаем, что Z_p – единственная абелева группа в $K(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{H}$ и E – группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Пусть $R = E^{\mathfrak{H}}$ – монолит группы E. Тогда R – p-группа. В силу теоремы Калужнина–Краснера $E \cong E_1 \leqslant R \operatorname{wr}(E/R)$, где E_1 – подгруппа в $D = R \operatorname{wr}(E/R)$ такая, что $E_1 F(D) = D$. В силу теоремы 2.3 из [11] $E_1 \in \operatorname{form} D$. Значит, $E \in \operatorname{form} D$. Легко видеть, что

$$D \in R_0\bigl(Z_p \operatorname{wr}(E/R)\bigr) \subseteq \operatorname{form}\bigl(Z_p \operatorname{wr}(E/R)\bigr).$$

Пусть $Y = B \operatorname{wr}(E/R) = K \leftthreetimes (E/R)$, где K – база сплетения Y. Пусть B_1 – первая копия группы B в K. В силу сказанного ранее в B_1 найдется собственная нормальная подгруппа X такая, что B_1/X – простая группа и $(B_1/X) \operatorname{wr}(E/R) \in \mathfrak{H}$. Так как $B_1 \cong B \in \mathfrak{M}$ и (Z_p) – класс всех простых групп в $\mathfrak{M}$, то $B_1/X \cong Z_p$. Значит,

$$Z_p \operatorname{wr}(E/R) \cong (B_1/X) \operatorname{wr}(E/R) \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому

$$E \in \operatorname{form} D \subseteq \operatorname{form}\bigl(Z_p \operatorname{wr}(E/R)\bigr) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$ и E – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $R = E^{\mathfrak{H}}$. Пусть $R \cong A_1 \times \cdots \times A_t$, где $A_1 \cong \cdots \cong A_t$ – простые группы. Тогда, поскольку $E \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $A_1 \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $A_1 \cong Z_p$. Но тогда $E \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что в общем случае (т.е. без условия $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$) теорема 1 неверна.

Пример. Пусть A – простая неабелева группа, Z_p – группа простого порядка p и $B = A \operatorname{wr} Z_p = K \leftthreetimes Z_p$, где K – база сплетения B. Пусть $\mathfrak{M} = \operatorname{form} B$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \operatorname{form} A$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Покажем прежде, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Действительно, если G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и $R = G^{\mathfrak{H}}$ – ее монолит, то $R \in \mathfrak{M}$. Пусть T – композиционный фактор группы R. Тогда $T \in \mathfrak{M}$. Согласно лемме 1 работы [5] группа B монолитична и ее монолит совпадает с K. Значит, согласно лемме 18.2 из [12] $\operatorname{form}(B/K) = \operatorname{form} Z_p$ – единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{M}$. Понятно, что $\operatorname{form} T \neq \operatorname{form} B$. Значит, $T \in \operatorname{form} Z_p$. Поэтому R – p-группа. Но тогда $G \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть f – композиционный экран такой, что $f(A) = f(Z_p) = \operatorname{form} A$ и $f(T) = \varnothing$ для всех простых групп T, неизоморфных ни одной из групп A, Z_p. Покажем, что $\operatorname{CL}(f) = \mathfrak{F}$. Предположим, что $\operatorname{CL}(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка из $\operatorname{CL}(f) \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда

$$G/C_G(R) \in f(R) \neq \varnothing.$$

Значит, если T – композиционный фактор группы R, то T изоморфен одной из групп A или Z_p. Пусть $T \cong Z_p$. Тогда

$$G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p \operatorname{form} A) = \mathfrak{N}_p \operatorname{form} A = \mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть $T \cong A$. Тогда $C_G(R) = 1$. Значит,

$$G \cong G/C_G(R) \in f(A) = \operatorname{form} A \subseteq \mathfrak{F}.$$

Вновь полученное противоречие показывает, что $\operatorname{CL}(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что обратное включение неверно и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \operatorname{CL}(f)$ с монолитом $R = G^{\operatorname{CL}(f)}$. Легко видеть, что $G^{\operatorname{form} A} \neq 1$. Значит, $R \subseteq G^{\operatorname{form} A}$, т.е. R – p-группа. Понятно также, что $G^{\operatorname{form} A} \subseteq C_G(R)$. Поэтому $G/C_G(R) \in \operatorname{form} A = f(Z_p)$. Но $G/R \in \operatorname{CL}(f)$. Следовательно, $G \in \operatorname{CL}(f)$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \operatorname{CL}(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \operatorname{CL}(f)$. Экран f, очевидно, является внутренним. Значит, согласно лемме 1 $\mathfrak{F}$ – однопорожденная композиционная формация. Если формация $\mathfrak{M}$ является композиционной, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит лемме 2. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – однопорожденная композиционная формация и $\mathfrak{M}$ – непримарная (т.е. $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_q$ для всех простых чисел q) некомпозиционная формация.

Данный пример показывает, что ответ на вопрос 12.74 из [6] отрицателен.

В заключение обратим внимание на следующий интересный вопрос. Произведение формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t$ назовем *несократимой факторизацией* формации $\mathfrak{F}$, если

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$$

для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Можно ли описать все возможные несократимые факторизации однопорожденных композиционных формаций?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. № 4. P. 300–305.

[2] Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. С. 101–103.

[3] Ведерников В. А. О локальных формациях конечных групп // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 32–37.

[4] Воробьёв Н. Т. О факторизациях нелокальных формаций конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 5. Минск: Университетское, 1990. С. 21–24.

[5] Skiba A. N. On nontrivial factorisations of one-generated local formations of finite groups // Proc. Intern. Conf. Algebra Dedicated to the Memory of A.I. Mal'cev (Novosibirsk, August 21–26, 1989). Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1992. P. 363–374.

[6] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 1992.

[7] Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 4. С. 628–648.

[8] Шеметков Л. А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 179–198.

[9] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

[10] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. Вып. 7. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1992. С. 39–43.

[11] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[12] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

[13] Каргаполов М. М., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

[14] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. О наследственно неразложимых формациях групп // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 7. С. 581–583.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило
17.09.97