

УДК 517.948.33

МАТЕМАТИКА

Г. Г. ГАДЖИМАГОМЕДОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ЯДРОМ ТИПА КОШИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПАРАМЕТРЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 X 1971)

Статья посвящена исследованию уравнения

$$u(x) = \lambda r(x) \int_a^b \frac{f(s, u(s))}{r(s)(s-x)} ds, \quad (1)$$

$$r(x) = (x-a)^{1+\alpha}(b-x)^{1+\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1,$$

в классе H_δ^0 ; $u(x) \in H_\delta^0$, если $u(x)$ принадлежит классу Гельдера H_δ , и $u(a) = u(b) = 0$.

Сначала установим существование решения уравнения (1) при малых $|\lambda|$, затем докажем существование решения при любом вещественном λ .

Лемма. Пусть функция $f(s, u)$ определена при $a \leq s \leq b$, $-k \leq u \leq k$ и удовлетворяет условиям

$$|f(s_1, u_1) - f(s_2, u_2)| \leq B[|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|],$$

$$r(x) \int_a^b \frac{f(s, 0)}{r(s)(s-x)} ds \in H_{k, \delta}^0, \quad \max\{\alpha, \beta\} < \delta < 1;$$

$u(x) \in H_{k, \delta}^0$, если $u(x) \in H_\delta^0$ и $\|u\|_c \leq k$, $\omega(u, \sigma) \leq k\sigma^\delta$.

Тогда оператор

$$Au = \lambda r(x) \int_a^b \frac{f(s, u(s))}{r(s)(s-x)} ds$$

переводит класс $H_{k, \delta}^0$ в себя при $|\lambda| \leq \frac{k}{k_1 + cB(2+k)}$, где c — константа.

Доказательство леммы основано на том, что оператор

$$Su = r(x) \int_a^b \frac{\psi(s)}{r(s)(s-x)} ds$$

действует из H_δ^0 в H_δ^0 ограниченно ⁽³⁾.

В классе $H_{k, \delta}^0$ введем метрику

$$\rho_{L_p(p)}(u, v) = \left\{ \int_a^b \rho(s) |u(s) - v(s)|^p ds \right\}^{1/p}, \quad (2)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{(x-a)^{\alpha+p}(b-x)^{\beta+p}}, \quad 1 < p < \min \left\{ \frac{1-\alpha}{1-\delta}, \frac{1-\beta}{1-\delta} \right\}.$$

Тогда в силу мультипликативного неравенства Х. III. Мухтарова ⁽³⁾

$$\|f\|_{C[a, b]} \leq c H_\delta^\gamma(f) \|f\|_{L_p[a, b]}^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{1+\delta p}, \quad f(x) \in H_\delta, \quad p > 1,$$

получим полноту класса $H_{k,\delta}^0$ в метрике (2). Далее, применяя теорему Б. В. Хведелидзе ⁽⁵⁾ с весом $\rho_1(x) = (x-a)^{\alpha(p-1)}(b-x)^{\beta(p-1)}$, для оператора A имеем

$$\rho_{L_p(p)}(Au, Av) \leq c_p |\lambda| \rho_{L_p(p)}(u, v), \quad c_p = \text{const.}$$

Откуда следует, что оператор A является оператором сжатия в $H_{k,\delta}^0$ при

$$|\lambda| < \min \left\{ \frac{1}{c_p}, \frac{k}{k_1 + c_p(2+k)} \right\}.$$

Если перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$, то имеет место

Теорема 1. Пусть функция $f(s, u)$ определена при $a \leq s \leq b$, $-\infty < u < \infty$ и удовлетворяет условиям

$$|f(s_1, u_1) - f(s_2, u_2)| \leq B[|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|],$$

$$r(x) \int_a^b \frac{f(s, 0)}{r(s)(s-x)} ds \in H_\delta^0, \quad \max\{\alpha, \beta\} < \delta < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in H_\delta^0$ при

$$|\lambda| < \min \left\{ \frac{1}{c \cdot B}, \frac{1}{c_p} \right\}.$$

Опираясь на теорему 1 и используя результаты ⁽⁴⁾, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть функция $f(s, u)$ определена при $a \leq s \leq b$, $-\infty < u < \infty$ и удовлетворяет условиям

$$|f(s_1, u_1) - f(s_2, u_2)| \leq B[|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|],$$

$$|f'_u(s_1, u_1) - f'_u(s_2, u_2)| \leq B' [|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|],$$

$$|f''_{u^2}(s_1, u_1) - f''_{u^2}(s_2, u_2)| \leq B'' [|s_1 - s_2|^\delta + |u_1 - u_2|],$$

$$r(x) \int_a^b \frac{f(s, 0)}{r(s)(s-x)} ds \in H_\delta^0, \quad \max\{\alpha, \beta\} < \delta < 1,$$

$$f'_u(a, 0) = f'_u(b, 0) = 0.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в H_δ^0 при любом фиксированном вещественном параметре λ .

Доказательство. В дальнейшем все постоянные, не зависящие от λ и $u(x)$, будем обозначать c . В пространстве H_δ^0 введем норму

$$\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} + \sup_{\sigma > 0} \frac{\omega(f, \sigma)}{\sigma^\delta} = \|f\|_{C[a,b]} + H_\delta(f),$$

где $\omega(f, \sigma)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$. Легко заметить, что если $u(x) \in H_\delta$, то

$$\|f(s, u(s))\| \leq c(1 + \|u\|), \quad \|f'_u(s, u(s))\| \leq c(1 + \|u\|),$$

$$\|f''_{u^2}(s, u(s))\| \leq c(1 + \|u\|).$$

Запишем уравнение (1) в операторной форме

$$F(\lambda, u) = 0, \tag{3}$$

$$F(\lambda, u) = u(x) - \lambda r(x) \int_a^b \frac{f(s, u(s))}{r(s)(s-x)} ds.$$

(Под решением уравнения (1) будем понимать неявную функцию, определяемую из (3).)

Пусть при $\lambda = \lambda_0 > 0$ решением уравнения (3) будет функция $u_0(x) \in H_\delta^0$. Используя условия теоремы 2, легко доказать, что оператор $F(\lambda, u)$

имеет дифференциал Фреше в каждой точке пространства H_b^0 , причем

$$F'_u(\lambda, u)h = h(x) - \lambda r(x) \int_a^b \frac{f'_u(s, u(s))h(s)}{r(s)(s-x)} ds.$$

Покажем, что оператор $F'_u(\lambda, u)$ имеет обратный. С этой целью рассмотрим линейное сингулярное интегральное уравнение

$$h(x) - \lambda r(x) \int_a^b \frac{f'_u(s, u(s))h(s)}{r(s)(s-x)} ds = g(x), \quad (4)$$

где $g(x) \in H_b^0$. Введя обозначения $h_1(x) = h(x)/r(x)$, $g_1(x) = g(x)/r(x)$, представим уравнение (4) в виде

$$h_1(x) - \lambda \int_a^b \frac{f'_u(s, u(s))h_1(s)}{s-x} ds = g_1(x). \quad (4')$$

Из (3) следует, что $g_1(x) \in H_{(1+\alpha)-\delta, (1+\beta)-\delta, \delta}$. В силу условия теоремы 2 индекс уравнения (4') равен нулю и, следовательно (2), решение уравнения (4') имеет вид

$$h_1(x) = \frac{g_1(x)}{v(x)} + \frac{\lambda}{z(x)} \int_a^b \frac{f'_u(s, u(s))z(s)g_1(s)}{v(s)(s-x)} ds.$$

Значит,

$$[F'_u(\lambda, u)]^{-1}g = \frac{g(x)}{v(x)} + \frac{\lambda r(x)}{z(x)} \int_a^b \frac{f'_u(s, u(s))z(s)g(s)}{v(s)r(s)(s-x)} ds, \quad (5)$$

$$v(x) = 1 + \pi^2 \lambda^2 f_u^2(x, u(x)), \quad z(x) = \sqrt{v(x)} e^{\Gamma(x)}, \quad \Gamma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\ln G(s)}{s-x} ds.$$

Учитывая, что $f'_u(a, 0) = f'_u(b, 0) = 0$ и используя неравенство

$$\left\| r(x) \int_a^b \frac{\psi(s)}{r(s)(s-x)} ds \right\| \leq c \|\psi\|, \quad \psi(s) \in H_b^0,$$

получим

$$\| [F'_u(\lambda, u)]^{-1} \| \leq \left\| \frac{1}{v(x)} \right\| \left[1 + \lambda c \|z(x)\| \cdot \left\| \frac{1}{z(x)} \right\| \cdot \|f'_u(x, u(x))\| \right]. \quad (6)$$

Пусть T — множество тех функций из H_b^0 , для которых $\|u\| \leq \|u_0\| + 1$. Тогда из (6) и из равенства

$$f'_u(s, u(s)) - f'_u(s, u_0(s)) = [u(s) - u_0(s)] \int_0^1 f''_{us}(s, u_0(s) + r[u(s) - u_0(s)]t) dr,$$

получим для любого $u(x) \in T$

$$\begin{aligned} & \| [F'_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} [F'_u(\lambda, u) - F'_u(\lambda_0, u_0)] \| \leq \\ & \leq R(\lambda_0, \|u_0\|) [|\lambda - \lambda_0| + \lambda_0 \|u - u_0\|] e^{c\lambda_0 \|u_0\|}, \\ & \| [F'_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} F(\lambda, u_0) \| \leq 1/2 R(\lambda_0, \|u_0\|) |\lambda - \lambda_0| e^{c\lambda_0 \|u_0\|}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R(\lambda_0, \|u_0\|) = & c(1 + \|u_0\|) [1 + \lambda_0^2(1 + \|u_0\|)^2] \{1 + \lambda_0(1 + \|u_0\|) \times \\ & \times [1 + \lambda_0^2(1 + \|u_0\|)^2] [1 + \lambda_0(1 + \|u_0\|)]^2 [1 + \lambda_0^2(1 + \|u_0\|)^2] + \\ & + \lambda_0^2(1 + \|u_0\|)^2\}. \end{aligned}$$

Определив константы δ и ε равенствами

$$\delta = \delta(\lambda_0, \|u_0\|) = \frac{1}{R(\lambda_0, \|u_0\|) e^{c\lambda_0\|u_0\|} [1 + \lambda_0 R(\lambda_0, \|u_0\|) e^{c\lambda_0\|u_0\|}]}, \quad (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0, \|u_0\|) = \min \left\{ 1, \frac{1}{1 + \lambda_0 R(\lambda_0, \|u_0\|) e^{c\lambda_0\|u_0\|}} \right\},$$

можно показать, что если λ и $u(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta(\lambda_0, \|u_0\|), \quad \|u - u_0\| < \varepsilon(\lambda_0, \|u_0\|),$$

то

$$\| [F'_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} [F'_u(\lambda, u) - F'_u(\lambda_0, u_0)] \| < 1/2,$$

$$\| [F'_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} F(\lambda, u_0) \| < 1/2 \varepsilon,$$

т. е. условие теоремы о неявной функции ⁽⁴⁾ в формулировке ⁽⁴⁾ выполнено. Поэтому при $\lambda = \lambda_0 + \delta(\lambda_0, \|u_0\|) = \lambda_1$ уравнение (3) имеет решение $u_1(x) \in H_0^0$, для которого $\|u_1 - u_0\| < \varepsilon(\lambda_0, \|u_0\|)$. Продолжая этот процесс, получим

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

и соответствующая последовательность решений (3) $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ из H_0^0 , обладающие свойствами $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \delta(\lambda_n, \|u_n\|)$, $\|u_{n+1} - u_n\| < \varepsilon(\lambda_n, \|u_n\|)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, то теорема доказана.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = l = \infty$. Тогда, рассуждая так же, как и в ⁽⁴⁾, мы приходим к тому, что l удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0 + M/\lambda_0^d < l, \quad (8)$$

где M и d — константы, не зависящие от λ и $u(x)$.

Из (8) следует, что при

$$\lambda = \lambda_0 + M/\lambda_0^d = \mu_1 < l$$

уравнение (3) имеет единственное решение $u_1^*(x) \in H_0^0$.

Повторяя предыдущие рассуждения и беря вместо λ_0 число $\mu_1 < l$, и продолжая этот процесс, получим возрастающую последовательность

$$\mu_n + M/\mu_n^d < l, \quad (9)$$

где

$$\mu_n = \mu_{n-1} + M/\mu_{n-1}^d. \quad (9')$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \leq l. \quad (10)$$

Если перейти к пределу в (9'), то

$$\mu = \mu + M/\mu^d.$$

Следовательно, $\mu = \infty$, а потому, в силу (10), и $l = \infty$, что противоречит конечности l .

В заключение выражаю искреннюю благодарность Х. Ш. Мухтарову за постановку задачи и внимание к работе.

Дагестанский государственный университет
им. В. И. Ленина
Махачкала

Поступило
21 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Денчев, Лаб. вычислит. техники и автомат. Объед. инст. ядерных иссл., № Р5-4495, Дубна, 1969. ² Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ³ А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Магомедов, Изв. АН АзербССР, № 1, 2, 51 (1970). ⁴ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1965. ⁵ В. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисс. математич. инст., АН ГрузССР, 23, 3 (1957).