

И. А. ИБРАГИМОВ, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ИНВАРИАНТНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРА СДВИГА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 3 XI 1971)

1. Задача последовательного оценивания, которую мы рассматриваем в настоящей работе, заключается в следующем. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с общим распределением P_θ , содержащим неизвестный параметр θ . Будем считать, что P_θ абсолютно непрерывно по мере Лебега,

$$dP_\theta/dx = f(x - \theta), \quad x \in R^1, \quad \theta \in R^1,$$

и для какого-нибудь $\alpha > 0$

$$E_\theta |X_1 - \theta|^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha f(x) dx < \infty.$$

Процедура оценивания такова. Задаются

1) Момент остановки τ — случайная величина с целыми положительными значениями такая, что события $\{\tau = n\}$ измеримы относительно $(X_1, \dots, X_n)$ и $P_\theta\{\tau < \infty\} = 1$; 2) последовательность статистик $\mathbf{d} = \{d_1(X_1), \dots, d_k(X_1, \dots, X_k), \dots\}$. В качестве оценки для параметра θ принимается случайная величина $d_\tau(X_1, \dots, X_\tau)$. Следуя (1), будем называть пару $[d, \tau]$ планом последовательного оценивания.

Статистику $t(X_1, \dots, X_n)$ будем называть правильной, если при всех вещественных c $t(X_1 + c, \dots, X_n + c) = t(X_1, \dots, X_n) + c$.

Момент остановки τ назовем инвариантным, если события $\{\tau = n\}$ измеримы относительно $X_n - X_1, \dots, X_2 - X_1, n > 1$.

Наконец, план последовательного оценивания $[d, \tau]$ будет называться инвариантным, если момент остановки τ инвариантен, а все статистики $d_k(X_1, \dots, X_k)$, $\mathbf{d} = \{d_k\}$ являются правильными. Ниже мы будем рассматривать лишь инвариантные планы. В задаче оценивания параметра сдвига такое ограничение представляется достаточно естественным.

Выберем в качестве функции потерь функцию $r_\alpha(u, \theta) = |u - \theta|^\alpha$, $\alpha \geq 1$; тогда функция риска при истинном значении параметра θ и плане $T = [d, \tau]$ есть $R_\alpha(T, \theta) = E_\theta |d_\tau(X_1, \dots, X_\tau) - \theta|^\alpha$. В силу инвариантности плана $R_\alpha(T, \theta) = R_\alpha(T, 0) = R_\alpha(T)$.

В настоящей работе мы стараемся выяснить, какой асимптотический выигрыш может принести употребление инвариантных последовательных планов, подчиненных ограничению $E_\theta \tau \leq n$, в сравнении с планами постоянного объема n ($\tau \equiv n$), когда $n \rightarrow \infty$. Эта постановка задачи заимствована нами из (1). Инвариантность позволяет уточнить ее.

Именно, среди всех правильных оценок $t(X_1, \dots, X_n)$ существует наилучшая оценка $\hat{t}_n^{(a)}(X_1, \dots, X_n) = \hat{f}_n$, для которой $E_\theta |\hat{t}_n - \theta|^\alpha = \min_t E_\theta |t(X_1, \dots, X_n) - \theta|^\alpha$. Оценка $\hat{t}_n$ называется оценкой Питмена.

Она определяется из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{t}_n - u|^\alpha \prod_1^n f(X_j - u) du = \min_{s \in R^1} \int_{-\infty}^{\infty} |s - u|^\alpha \prod_1^n f(X_j - u) du.$$

Таким образом, надлежит изучить поведение при $n \rightarrow \infty$ отношения

$$\inf \frac{R_a(T, \theta)}{E_\theta |\tilde{t}_n - \theta|^a},$$

где infimum берется по всем инвариантным планам $T = [d, \tau]$ с $E_\theta \tau \leq n$.

2. Рассмотрим случай, когда информационное количество Фишера

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x)|^2}{f(x)} dx < \infty.$$

(Здесь и ниже по определению полагаем $|f'(x)|^\alpha / (f(x))^\beta = 0$ в тех точках x , где $f(x) = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.) В ряде работ доказывается, что в случае конечного информационного количества последовательные планы асимптотически не лучше планов постоянного объема (см., например, (1), где рассматривается ситуация, более общая, чем наша). Сформулируем сходный результат.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет следующим условиям:

1) для какого-нибудь числа $\beta > 0$

$$J_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x)|^{2+\beta}}{(f(x))^{1+\beta}} dx < \infty;$$

2) для какого-нибудь числа $\gamma > 0$ при $h \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f'(x+h)}{\sqrt{f(x+h)}} - \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right|^2 dx = O(h^\gamma).$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_T \frac{R_a(T, \theta)}{E_\theta |t - \theta|^a} = 1,$$

где inf берется по всем $T = [d, \tau]$ с $E_\theta \tau \leq n$.

3. В этом пункте мы рассмотрим плотности $f(x)$, имеющие конечное, но положительное число разрывов первого рода (скачков), расположенных в точках $x_1, \dots, x_r$, $r \geq 1$. Положим $p_i = f(x_i + 0)$, $q_i = f(x_i - 0)$. Будем, кроме того, предполагать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и для какого-нибудь числа $\gamma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x)|^{1+\gamma}}{(f(x))^\gamma} dx < \infty.$$

Известны примеры плотностей с разрывами первого рода, для которых последовательные планы существенно выгоднее планов постоянного объема (равномерное распределение на отрезке $|x - \theta| \leq 1/2$, см. (3-5)); существуют также примеры плотностей, для которых последовательные планы не более выгодны, чем планы постоянного объема (например, $f(x) \equiv 0$, $x < 0$; $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, см. (6)). Наши теоремы 2, 4 позволяют различить, для каких плотностей имеет место первый или второй случай.

Положим $Z_n(u) = \prod_{j=1}^n f\left(X_j - \frac{u}{n}\right) / \prod_{j=1}^n f(X_j)$, $q_n(u) = Z_n(u) / \int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u) du$.

В условиях п. 3 случайные процессы $q_n(u)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторому предельному процессу $q(u)$. Процесс $q(u)$ полностью определяется числами p_i, q_i ; его точный вид указан в заметке (7). Пусть, наконец,

$$\Delta(a) = \Delta = \inf_{s \in R^1} \int_{-\infty}^{\infty} |s - u|^a q(u) du. \text{ Положим } b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{t}_n - u|^a q_n(u) du$$

и рассмотрим следующие планы.

$$\text{П л а н I. Полагаем } d = \{\tilde{t}_n\}, \tau = \min \left\{ k : b_k \leq \frac{E_0^a \Delta^{1/a}}{n^a} \right\}.$$

$$\text{П л а н II. Снова } d = \{\tilde{t}_n\}, \text{ но } \tau = \min \left\{ k : b_k \leq \frac{E_0^{a+1} \Delta^{1/(a+k)}}{n^{a+1}} k \right\}.$$

$$\text{Для обоих планов } \overline{\lim}_n \frac{E_0 \tau}{n} \leq 1.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 3. Пусть, кроме того, либо $\sum_{i=1}^r p_i q_i \neq 0$, либо не все разности $p_i - q_i$ одного знака.

Тогда для плана I

$$\overline{\lim}_n \frac{E_0 |\tilde{t}_\tau - \theta|^a}{E_0 |\tilde{t}_n - \theta|^a} \leq \frac{E_0^a \Delta^{1/a}}{E_0 \Delta} < 1, \quad a > 1; \quad (1)$$

для плана II

$$\overline{\lim}_n \frac{E_0 |\tilde{t}_\tau - \theta|^a}{E_0 |\tilde{t}_n - \theta|^a} \leq \frac{E_0^{a+1} \Delta^{1/(a+1)}}{E_0 \Delta} < 1, \quad a \geq 1.$$

Примеры. 1) Пусть $\sum p_i q_i = 0$, а $\sum p_i = \sum q_i = p$. Тогда случайная величина Δ имеет распределение на $(0, \infty)$ с плотностью $p^2 x e^{-px}$ и $E_0 \Delta^{1/a} / (E_0 \Delta) = 2^a / \Gamma(a+2)$.

2) Пусть X_j распределены равномерно на $|x - \theta| \leq 1/2$. Тогда план I совпадает с оптимальным (см. (3)) планом $\tau = \min \{k: 1 - r_k \leq 2/n\}$, r_k — размах $(X_1, \dots, X_n)$. Левая часть (1) равна в этом случае $1/3$, ее оценка — правая часть (1) — равна $4/\Gamma(4) = 2/3$.

Теорема 3. В условиях теоремы 2

$$\liminf_n \inf_T \frac{R_a(T, \theta)}{E_0 |\tilde{t}_n - \theta|^a} \geq \frac{1}{2a+1} \left(\frac{2a}{2a+1} \right)^{2a} \frac{E_0^{2a} \Delta}{E_0^a \Delta^2},$$

где infimum берется по всем $T = [d, \tau]$ с $E_0 \tau \leq n$.

В связи с теоремами 2 и 3 полезно отметить, что $E_0 |\tilde{t}_n - \theta|^a \sim E_0 \Delta / n^a$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 3. Пусть $p_i q_i = 0$ для всех i и все разности $p_i - q_i$ одного знака.

Тогда

$$\liminf_n \inf_T \frac{R_a(T, \theta)}{E_0 |\tilde{t}_n - \theta|^a} = 1.$$

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 X 1971

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, 194, № 2 (1970). ² А. М. Каган, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 104, 19 (1968). ³ A. Wald, Statistical Decision Functions, 1950. ⁴ А. И. Шалыт, ДАН, 189, № 1 (1969). ⁵ А. И. Шалыт, ДАН, 193, № 4 (1970). ⁶ А. М. Каган, Ю. В. Линник и др., ДАН, 199, № 4 (1971). ⁷ И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, 194, № 2 (1970).