Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 517.392 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ИВАНОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 18 X 1971)

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma\setminus\delta_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad t\in\gamma, \tag{1}$$

где γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, δ_ε — часть γ с центром в точке t и длиной ε. Известно [1], что при весьма общих предположениях относительно $f(t)$

$$S\varphi = f(t), \quad \varphi(t) = Sf \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\zeta}{2}\,d\theta,$$

$$t = e^{i\zeta}, \quad \tau = e^{i\theta}, \quad g(\theta) = f(e^{i\theta}). \tag{2}$$

Пусть F — класс функций $f(t)$; Ψ — класс функционалов, определенных на F; M — множества алгоритмов в смысле Маркова и $R = R(f, A, \{\psi_\nu\}_1^N, t)$ — результат приближенного решения уравнения $S\varphi = f$ при помощи алгоритма $A\in M$, использующего информацию об f, заданную не более чем N значениями $\psi_\nu(f)$ функционалов $\psi_\nu\in\Psi$. Введем обозначения по аналогии с [2]:

$$\begin{gathered}
v(f, A, \{\psi_\nu\}_1^N) = \rho(\varphi, R),\\
v(F, A, \{\psi_\nu\}_1^N) = \sup_{f\in F} v(f, A, \{\psi_\nu\}_1^N),\\
v(F, M, \{\psi_\nu\}_1^N) = \inf_{A\in M} v(F, A, \{\psi_\nu\}_1^N),\\
v_N(F, M, \Psi) = \inf_{\{\psi_\nu\}_1^N\subset\Psi} v(F, M, \{\psi_\nu\}_1^N),\\
v(F, \{\psi_\nu\}_1^N) = \inf_{A} v(F, A, \{\psi_\nu\}_1^N),\\
v_N(F, \Psi) = \inf_{\{\psi_\nu\}_1^N\subset\Psi} v(F, \{\psi_\nu\}_1^N),\\
v_N(F) = \inf_{\{\psi_\nu\}_1^N} v(F, \psi_\nu\}_1^N).
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\rho(\varphi, R)$ означает меру погрешности точного решения φ, а $v(F, \{\psi_\nu\}_1^N)$ и $v_N(F)$ — соответственно нижнюю грань по всем алгоритмам и по всем способам задания N функционалов.

Алгоритм, для которого достигается $v(F, \{\psi_\nu\}_1^N)$, назовем оптимальным. Если $v(F, A, \{\psi_\nu\}_1^N) / v(F, \{\psi_\nu\}_1^N) \to 1$, когда $N\to\infty$, то алгоритм A назовем асимптотически оптимальным. Условие $v(F, A, \{\psi_\nu\}_1^N) / v(F, \{\psi_\nu\}_1^N) \leqslant \mathrm{const}$ при $N\to\infty$ будет означать оптимальность по порядку алгоритма A. Подобным образом нетрудно определить понятия оптимальных алгоритмов на данном множестве M, а также понятия оптимальных множеств функционалов $\{\psi_\nu\}_1^N$.

Будем сначала считать, что $f(t)$ задана в N точках

$$t_\nu = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\nu\right), \quad \nu = 1, \ldots, N, \quad f_\nu = f(t_\nu), \quad \Psi \equiv \Psi_1$$

и совпадает со множеством функционалов вида $\psi_\nu = f(\tau_\nu)$, $\tau_\nu \in \gamma$; $\rho(\varphi, R) = \max\limits_{t\in\gamma}|\varphi(t) - R(f, A, \{f_\nu\}_1^N, t)|$.

Теорема 1. *Пусть $F \equiv H(C_\alpha, \alpha)$ — множество функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α и константой C_α: $|f(t^{(1)}) - f(t^{(2)})| \leqslant C_\alpha|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}|$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $t^{(s)} = \exp(i\theta^{(s)}) \in \gamma$, $s = 1, 2$, где α и C_α не зависят от $f \in H(C_\alpha, \alpha)$.*

Тогда справедливо соотношение

$$v(H(C_\alpha, \alpha), \{t_\nu\}_1^N) \sim \frac{2}{\alpha+1}\frac{C_\alpha}{\pi}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \ln N, \tag{4}$$

причем асимптотически оптимальным будет алгоритм, основанный на вычислении R по формуле

$$R = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}}\frac{f_\nu}{\tau - t}\,d\tau, \tag{5}$$

в которой $t_{\nu+1/2} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\nu \pm i\frac{\pi}{N}\right)$ *и* $\sum\limits_{\nu=1}^{N}$ *означает суммирование по всем $\nu \neq s \pm 1, s$; $t \in \widetilde{t_{s-1/2}, t_{s+1/2}} \subset \gamma$.*

Доказательство. Для получения необходимой оценки $v(H(C_\alpha, \alpha), \{t_\nu\}_1^N)$ снизу построим функцию

$$f^*(t) = g^*(\theta) =$$
$$= \begin{cases} C_\alpha(\theta - \theta_\nu)^\alpha, & \theta \in (\theta_\nu, \theta_\nu + \pi/N), \quad \theta_\nu = (2\pi/N)\nu, \\ C_\alpha(\theta_{\nu+1} - \theta)^\alpha, & \theta \in (\theta_\nu + \pi/N, \theta_{\nu+1}), \quad \nu = 0, \ldots, [N/2] - 1, \\ -C_\alpha(\theta - \theta_\nu)^\alpha, & \theta \in (\theta_\nu, \theta_\nu + \pi/N), \quad \theta_\nu = (2\pi/N)\nu, \\ -C_\alpha(\theta_{\nu+2} - \theta)^\alpha, & \theta \in (\theta_\nu + \pi/N, \theta_{\nu+1}), \quad \nu = [N/2], \ldots, N-1. \end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что $f_\nu^* = g^*(\theta_\nu) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, N-1$, и $g^*(\theta) \in H(C_\alpha, \alpha)$. Положив $\varphi^*(t) = Sf^*$ и проделав ряд элементарных выкладок, получим

$$\max_{t\in\gamma}|\varphi^*(t)| \geqslant |\varphi^*(0)| \sim \frac{2C_\alpha}{\pi}\sum_{\nu=0}^{[N/2]-1}\left[\int\limits_{\theta_\nu}^{\theta_\nu+\pi/N}\frac{(\theta-\theta_\nu)^\alpha}{\theta}d\theta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\theta_\nu+\pi/N}^{\theta_{\nu+1}}\frac{(\theta_{\nu+1}-\theta)^\alpha}{\theta}d\theta\right] \geqslant \frac{2C_\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha + \frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha\sum_{\nu=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{\nu+1}\right] \sim \frac{2C_\alpha}{(\alpha+1)\pi}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \ln N. \tag{7}$$

Так как для любого алгоритма A с учетом лишь главного члена

$$v(H(C_\alpha, \alpha), A, \{t_\nu\}_1^N) \geqslant \max\{v(f^*, A), \{f_\nu^*\}_1^N), v(-f^*, A, \{-f_\nu^*\}_1^N)\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{v(f^*, A, \{f_\nu^*\}_1^N) + v(-f^*, A, \{-f^*\}_1^N)}{2} \geqslant \frac{2C_\alpha}{\pi(\alpha+1)}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \ln N, \tag{8}$$

то и нижняя грань по всем алгоритмам с той же оговоркой не меньше $\frac{2C_\alpha}{\pi(\alpha+1)}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \ln N$. Для получения соответствующей оценки сверху оценим $\sup\limits_{f\in H(C_\alpha,\alpha)} \max\limits_{t\in\gamma} |Sf-R|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t\in \overset{\smile}{1, t_{1/2}} \subset \gamma$. В результате с учетом лишь главного члена

$$|Sf-R| \sim \left|\frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=2}^{N-1}\int\limits_{t_{\nu-1/2}}^{t_{\nu+1/2}} \frac{f(\tau)-f_\nu}{\tau-t}\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C_\alpha}{\pi}\sum_{\nu=2}^{[N/2]-1}\int\limits_{\theta_\nu-\pi/N}^{\theta_\nu+\pi/N}\frac{|\theta-\theta_\nu|^\alpha}{|\tau-t|}\,d\theta \sim \frac{2C_\alpha}{\pi(\alpha+1)}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha \ln N.$$

В случае $\alpha=1$ никакая сетка N узлов на γ не может дать лучшей оценки погрешности по порядку относительно N.

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$v_N(H(C_1,1),\Psi_2) = C_1\cdot O\left(\frac{\ln N}{N}\right). \tag{9}$$

Теоремы 1, 2 означают, что обычные способы приближенного вычисления сингулярных интегралов ([3]), основанные на формуле

$$Sf \approx S('f), \tag{10}$$

где полигон

$$'f(t) = f_{\nu+1}\frac{t-t_\nu}{t_{\nu+1}-t_\nu} + f_\nu\frac{t_{\nu+1}-t}{t_{\nu+1}-t_\nu},\quad t\in\overset{\smile}{t_\nu, t_{\nu+1}},\quad t_\nu = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\nu\right), \tag{11}$$

или на формуле

$$Sf \approx S(U_n(f,t)) = \sum_0^n a_k t^k - \sum_{-n}^{-1} a_k t^k, \tag{12}$$

$$U_n(f,t) = \sum_{-n}^{n} a_k t^k,\quad a_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=-n}^{n} f_\nu t_\nu^{-k},\quad t_\nu = \exp\left(i\frac{2\pi}{2n+1}\nu\right), \tag{13}$$

являются оптимальными по порядку в классе $H(C_\alpha,\alpha)$, $0<\alpha<1$, среди всех алгоритмов и в классе $H(C_1,1)$ среди всех алгоритмов и всевозможных способов выбора N или $2n+1$ точек на γ, в которых заданы значения f. Следует еще заметить, что соотношение (9) справедливо в более широком классе функций Зигмунда $z(C_1)$:

$$\left|f(t_1)+f(t_2)-2f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right| \leqslant C_1|\theta_1-\theta_2|,\quad t_1,t_2\in\gamma,\quad t_s = e^{i\theta_s},\quad s=1,2.$$

Метод, примененный при доказательстве теоремы 1, позволяет получить аналогичные результаты и во многих других классах функции.

Теорема 3. *Пусть $F\equiv H(C_r,1)$ — множество функций, $(r-1)$-е производные которых по θ входят в $H(C_r,1)$.*

Тогда

$$v(H(C_r,r),\{t_\nu\}_1^N) = C_r\cdot O\left(\frac{\ln N}{N^r}\right), \tag{14}$$

причем оптимальным по порядку будет алгоритм (12), (13), *когда* $2n+1=N$. *При* $r=2$ *оптимальным по порядку будет также алгоритм* (10), (11).

Для доказательства достаточно, с одной стороны, построить пример функции

$$f_2^*(t) =$$

$$=\begin{cases} N^r C_r A_r(\theta-\theta_\nu)^r(\theta_{\nu+1}-\theta)^r, & \theta\in(\theta_\nu,\theta_{\nu+1}),\ \nu=0,\ldots,\left[\frac{N}{2}\right]-1,\\ -N^r C_r A_r(\theta-\theta_\nu)^r(\theta_{\nu+1}-\theta)^r, & \theta\in(\theta_\nu,\theta_{\nu+1}),\quad \nu=\left[\frac{N}{2}\right],\ldots,N-1,\end{cases} \tag{15}$$

где A_r выбирается так, чтобы $f_2^*(t) \in H(C_r, r)$, и показать по аналогии с доказательством теоремы 1, что $|Sf_2^*| = C_r \cdot O\left(\frac{\ln N}{N^r}\right)$, и, с другой стороны, воспользоваться известным результатом ([3]) о том, что $|Sf - S(U_n(f, t))| = C_r \cdot O\left(\frac{\ln N}{N^r}\right)$. При $r = 2$ известно также, что $|Sf - S('f)| = C_2 \cdot O\left(\frac{\ln N}{N^2}\right)$.

Аналогично можно рассмотреть классы функций $F_{\rho, c}$, аналитических в кольце $1/\rho \leqslant |z| \leqslant \rho$, $\rho > 1$, и ограниченных в нем по модулю константой, c и G_{ν, A_ε} аналитических при любом z и обладающих свойством $\max\limits_{1/\rho \leqslant |z| \leqslant \rho} |f(z)| \leqslant A_\varepsilon \exp[(\nu + \varepsilon)\rho]$, $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$. Можно ожидать, что

$$v(F_{\rho,c}, \{t_\nu\}_1^N) = c \cdot O\left(\frac{\ln N}{\rho^N}\right) \quad \text{и} \quad v(G_{\nu,A_\varepsilon}, \{t_\nu\}_1^N) = A_\varepsilon \cdot O\left[\left(\frac{\nu+\varepsilon}{N}\right)^N \ln N\right],$$

однако мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим теперь кратко случай другого $\Psi \equiv \Psi_2$, совпадающего со множеством коэффициентов Фурье α_k в разложении

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k t^k, \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau, \tag{16}$$

а также более общий случай $\rho(\varphi, R) = \|\varphi - R\|$, где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве функций.

Известно ([4, 5]), что при весьма широких предположениях относительно $f(t)$

$$Sf = \sum_0^{\infty} \alpha_k t^k - \sum_{-\infty}^{-1} \alpha_k t^k. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть $F \equiv E$ — линейное нормированное пространство функций $f(t)$, $t \in \gamma$, для которых справедливы однозначные представления* (20) и (21), *причем наряду с каждой $f \in E$ в E входит $f - \sum\limits_{-N}^{N} \alpha_k t^k$.*

Тогда

$$v(E, \{\alpha_k\}_{-N}^N) = \sup_{f \in E} \left\| f - \sum_{-N}^{N} \alpha_k t^k \right\|. \tag{18}$$

В заключение рассмотрим кратко вопрос о минимальном числе арифметических действий, необходимых для вычисления любого сингулярного интеграла в данном классе с заданной точностью. Применяя формулы (12), (13) и алгоритмы быстрого преобразования Фурье ([6]), будем иметь число действий порядка $N \log_2 N$, что в силу (4), (9) и (14) нетрудно выразить через заданную точность. Можно ожидать, что указанные числа действий будут минимальными по порядку в соответствующих классах.

Институт кибернетики
Академии наук СССР
Киев

Поступило
27 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1962. [2] Н. С. Бахвалов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **10**, № 3, 555 (1970). [3] В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, **1**, **2**, М., 1965. [5] Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, **23**, 1956, 3—158. [6] W. T. Cochran, J. W. Cooley et al., IEEE Trans. Audio and Electroacoust., AV-15, № 2, (45) (1967).