

Л. А. БУНИМОВИЧ

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ БИЛЬЯРДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 XI 1971)

В работе ⁽¹⁾ показано, что динамические системы, порожденные движением материальной точки в областях со строго выпуклым внутрь краем, являются K -системами ^(2, 3), т. е. устроены аналогично динамическим системам, порождаемым регулярными стационарными случайными процессами ^(4, 11). В силу этой аналогии представляется естественной попытка приложить методы доказательства центральной предельной теоремы теории вероятностей к такого рода динамическим системам.

1. Описание динамической системы. Рассмотрим замкнутую область Q , получаемую из двумерного тора в результате вырезания конечного числа попарно не пересекающихся выпуклых областей, каждая из которых ограничена выпуклой кривой класса C^3 , причем кривизна в каждой точке этой кривой отлична от нуля. Эти кривые в совокупности составляют край ∂Q области Q . Для простоты изложения будем в дальнейшем считать, что число этих кривых равно единице. Пусть M есть ограничение единичного касательного пучка двумерного тора на Q . Точки пространства M будем называть линейными элементами (л.э.). M является расслоением с базой Q . Естественную проекцию M на Q обозначим через π .

M есть трехмерное многообразие с краем ∂M , который образован из таких л.э. x , что $\pi(x) \in \partial Q$. На крае $\partial M = \pi^{-1}(\partial Q)$ определена система координат (r, φ) , где r — параметр длины дуги на ∂Q , φ — угловой параметр. Мы считаем край ∂Q оснащенный полем внутренних (по отношению к Q) нормалей $n(q)$. В каждой точке q угол φ отсчитывается от $n(q)$.

Введем в M меру μ , положив $d\mu = dq d\omega$, где dq — мера на Q , индуцированная метрикой, $d\omega$ — естественная мера на слое $S^1(q)$.

Определение 1. Бильярдом в Q называется динамическая система в M , порожденная движением материальной точки массы 1 по прямой линии внутри Q с единичной скоростью. При достижении края ∂Q точка отражается от него по закону «угол падения равен углу отражения». Бильярды в областях Q , край которых имеет всюду положительную кривизну (при выбранном нами оснащении края), называются рассеивающими.

Однопараметрическую группу сдвигов вдоль траекторий бильярда обозначим $\{S_t\}$, $-\infty < t < \infty$. Она сохраняет меру μ (см. ⁽⁵⁾).

Обозначим $M_1 = \{x \in \partial M: (x, n(q)) \leq 0, \text{ где } q = \pi(x)\}$, и пусть $\tau(x)$ — ближайший отрицательный момент отражения от края траекторией точки x . Нетрудно видеть, что $\tau(x) > -\infty$ и при любом $x \in M_1$ определено преобразование $Tx = S_{\tau(x)-0}$, $x \in M_1$. Введем в M_1 меру ν . T сохраняет меру ν и называется производным автоморфизмом потока $\{S_t\}$. Край $\partial M_1 = \Gamma$ состоит из линейных элементов, касательных к краю ∂Q .

2. Необходимые сведения из работы ⁽¹⁾. Функция $\tau(x)$ ограничена по модулю снизу, $|\tau(x)| \geq \tau_0$.

Преобразование T , вообще говоря, разрывное. Оно имеет особенности на множестве $M_2 = T^{-1}\Gamma \cup \Gamma$. Множество $T^{-1}\Gamma$ состоит из счетного числа кривых. Предельными точками для этих кривых служат такие точки, в окрестности которых функция $\tau(x)$ не ограничена. Число этих точек конечно.

Для почти каждой точки $x \in M$ существуют проходящие через нее локальный сжимающийся трансверсальный слой (л.с.т.с.) и локальный расширяющийся трансверсальный слой (л.р.т.с.) (см. (1, 5)), причем каждый отдельный слой трансверсального слоения имеет особенности. Особые точки л.р.т.с. любой точки x принадлежат множеству $\bigcup_{t \geq 0} S_t \Gamma$, а л.с.т.с. — множеству $\bigcup_{t \leq 0} S_t \Gamma$. Сжимающееся и расширяющееся трансверсальные слоения абсолютно непрерывны (см. (1, 5)).

Измеримое разбиение (см. (6)) $\xi^-(\xi^+)$ пространства M на регулярные отрезки сжимающихся (расширяющихся) слоев является K -разбиением (см. (3)) для потока $\{S_t\}$ ($\{S_{-t}\}$). Соответствующие разбиения пространства M_1 для автоморфизма T обозначим $\xi_T^-(\xi_T^+)$.

3. Центральная предельная теорема (ц.п.т.)

Определение 2. Измеримая, существенно ограниченная действительная функция f , заданная на пространстве Лебега M с мерой μ (см. (6)), в котором действует измеримый эргодический поток $\{S_t\}$, подчиняется ц.п.т., если существует такая постоянная $\sigma > 0$, что для любого фиксированного числа a , $-\infty < a < \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu \left\{ x: \int_0^T (f(S_t x) dt - T\bar{f}) / \sqrt{T} < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp(-1/2 u^2) du,$$

где $\bar{f} = \int_M f(x) d\mu$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть действительная функция f , заданная на пространстве M линейных элементов рассеивающего бильярда, удовлетворяет условиям:

- 1) f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1 > 0$;
- 2) $D_T(f) \sim cT$ при $T \rightarrow \infty$, где

$$D_T(f) = \int_M \left[\int_0^T (f(S_t x) - \bar{f}) dt \right]^2 d\mu, \quad c > 0;$$

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $N(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$, что при всех $T > T(\varepsilon)$

$$\frac{1}{D_T(f)} \int_{\Omega} \left[\int_0^T (f(S_t x) - \bar{f}) dt \right]^2 d\mu < \varepsilon,$$

где $\Omega = \left\{ x: \left| \int_0^T (f(S_t x) - \bar{f}) dt \right| > N(\varepsilon) \sqrt{D_T(f)} \right\}$.

Тогда функция f подчиняется ц.п.т. и постоянная σ равна $\sqrt{c}$.

Доказательство этой теоремы проводится методом, впервые использованным в (7) (см. также (8, 9)) для доказательства ц.п.т. в случае геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны.

Для простоты изложения будем считать, что $\bar{f} = 0$. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\varphi_T(\lambda) = \int_M \exp \left(i\lambda \int_0^T f(S_t x) dt \right) d\mu = \int_M \exp \left(i\lambda \int_{-T+\tau}^{\tau} f(S_t x) dt \right) d\mu.$$

Тогда при любом $\tau > 0$

$$\varphi_T(\lambda) = \int_{M|_{C_0^-}} d\mu(C_0) \int_{C_0} \exp \left(i\lambda \int_0^{\tau} f(S_t x) dt + i\lambda \int_{-T+\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x|C_0),$$

где C_0 — элемент разбиения ξ^- .

Обозначим через $\mathfrak{M}(\xi)$ σ -алгебру, порожденную измеримым разбиением ξ пространства M . Разбиение M на точки будем обозначать ε . Нетрудно доказываемся

Лемма 1. Для любых заданных положительных чисел δ_1 и δ_2 найдутся такие множества $N_1 \in \mathfrak{M}(\xi^-)$ и $N_2 \in \mathfrak{M}(\varepsilon)$, что

- 1) $\mu(N_1) > 1 - \delta_1$;
- 2) $\mu(N_2 | C_0) > 1 - \delta_2$ для каждого элемента разбиения ξ^- , принадлежащего множеству N_1 ;

3) существует постоянная $K(\delta_1, \delta_2)$ такая, что при всех $\tau > 0$

$$\left| \int_0^\tau f(S_t x_1) dt - \int_0^\tau f(S_t x_2) dt \right| < K(\delta_1, \delta_2)$$

для любых линейных элементов $x_1, x_2 \in N_2$, принадлежащих одному элементу C_0 разбиения ξ^- .

В следующей лемме, играющей основную роль при доказательстве ц.п.т., устанавливается, что для рассеивающих бильярдов выполняется несколько ослабленное условие локально сильного перемешивания ^(8, 10).

Лемма 2. Для любых положительных чисел δ'_1 и δ'_2 существует конечное разбиение пространства M на $(k+1)$ множество $A_0, A_1, \dots, A_k$ и постоянная $K'(\delta'_1, \delta'_2)$ такие, что

- 1) $\mu(A_0) < \delta'_1$;
- 2) при $i = 1, 2, \dots, k$ для любых двух элементов $C_{\tau^-}^{'}$ и $C_{\tau^-}^{''}$ разбиения $\xi_{A_i}^-$ и для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_{\tau^-}^{'}}^{C_{\tau^-}^{''}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C_{\tau^-}^{'}) - \right. \\ & \left. - \int_{C_{\tau^-}^{'}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C_{\tau^-}^{''}) \right| < K'(\delta'_1, \delta'_2) |\lambda| + \delta'_2, \end{aligned}$$

где $\xi_{A_i}^-$ — измеримое разбиение множества A_i , индуцированное разбиением ξ^- .

Наметим доказательство леммы 2. Концы каждого элемента разбиения ξ_{τ^-} принадлежат множеству $F = \bigcup_{i \geq 0} T^i \Gamma = \bigcup_{i \geq 0} F_i$. Множество F_i представляет совокупность счетного числа кривых в M_1 ⁽¹⁾. Множество $F \setminus F_i$ разбивает F_i на отрезки $F_i^{(k)}$. Обозначим через $F_{i_1, i_2}^{(k_1, k_2)}$ совокупность элементов разбиения ξ_{τ^-} , один конец которых принадлежит $F_{i_1}^{(k_1)}$, а другой $F_{i_2}^{(k_2)}$.

Найдется такое $\alpha_0 > 0$, что мера множества N_{α_0} , состоящего из элементов разбиения ξ_{τ^-} , длина которых больше α_0 , больше $1 - 1/2\delta'_0$, где δ'_0 мы выберем позднее.

Выберем теперь из совокупности множеств $\{F_{i_1, i_2}^{(k_1, k_2)}\}$ конечное число множеств $B_1, B_2, \dots, B_m$ таких, что $v(\bigcup_{i=1}^m B_i \cap N_{\alpha_0}) > 1 - \delta'_0$. Из свойства абсолютной непрерывности слоений следует, что существует разбиение каждого множества $B_i \cap N_{\alpha_0}$ на конечное число таких подмножеств G_i^k , что для любых двух элементов C' и C'' разбиения (ξ_{τ^-}) условная мера их канонически изоморфных (см. ⁽⁵⁾) подмножеств больше $1 - 1/8\delta'_2$.

Пусть $G = \bigcup_{i,k} G_i^k$. Рассмотрим подмножество $\tilde{G} \subset M$

$$\tilde{G} = \{x: x = S_{-t}x_0, 0 \leq t < \max_{y_0 \in C_{\tau^-}^{(x_0)}} |\tau(y_0)|, x_0 \in G_i^k\}.$$

Возьмем теперь число δ_3' столь малым, чтобы $\mu(\bar{G}) > 1 - 1/4\delta_1'$. Рассмотрим разбиение множества $\bar{G}$ на множества

$$G_{is}^k = \{x: x = S_{-t}x_0, sh \leq t < (s+1)h, x_0 \in G_i^k\}, \quad h < \frac{\delta_2'}{4K}, \quad K = \max_{x \in M} |f(x)|.$$

Рассмотрим теперь разность

$$\Delta = \left| \int_{C_{iks}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C'_{iks}) - \int_{C''_{iks}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C''_{iks}) \right|,$$

C'_{iks}, C''_{iks} — элементы разбиения $\bar{G}_{is}^k$.

Из предыдущего следует, что найдутся такие элементы C'_{ik} и C''_{ik} разбиения $(\xi_{\tau^-})_{G_i^k}$, что $C'_{iks} = S_{|t|} C'_{ik}$ и $C''_{iks} = S_{|t|} C''_{ik}$, где $|t| < h$. Возьмем элемент $C_{iks}^0 = S_{-t'}, C'_{iks}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \left| \int_{C_{iks}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C'_{iks}) - \int_{C_{iks}^0} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) \times \right. \\ & \times d\mu(x | C_{iks}^0) \left. \right| + \int_{C''_{iks}} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C''_{iks}) - \\ & - \int_{C_{iks}^0} \exp \left(i\lambda \int_{-\tau}^0 f(S_t x) dt \right) d\mu(x | C_{iks}^0) \left. \right| = \Delta' + \Delta''. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством $|e^{i\alpha} - 1| \leq \alpha$, получим $\Delta'' < hK$.

Из свойства абсолютной непрерывности слоев следует, что при достаточно малом h на множестве слоев N меры, большей $1 - (1/4\delta_1')^2$, справедливо неравенство $\Delta' < \frac{K'(\delta_1', \delta_2')}{2} |\lambda| + \frac{3}{4} \delta_2'$.

Положим $A_0 = M \setminus \bigcup_{iks} (G_{is}^k \cap N)$. Разбиение пространства M на множества $A_0, G_{is}^k \cap N$ удовлетворяет требованиям леммы 2.

Из леммы 2 методами работ (4, 7) выводится следующее неравенство для характеристических функций:

$$|\varphi_T(\lambda) - \varphi_{T-\tau}(\lambda) \varphi_{\tau}(\lambda)| < \alpha(\delta_1, \delta_2, \delta_1', \delta_2') + |\lambda| K(\delta_1, \delta_2, \delta_1', \delta_2'),$$

где $\alpha(\delta_1, \delta_2, \delta_1', \delta_2') \rightarrow 0$ при одновременном стремлении к нулю всех аргументов, а функция $K(\delta_1, \delta_2, \delta_1', \delta_2')$ ограничена. Из этого неравенства следует (см. (8)) утверждение теоремы.

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Г. Синай УМН, 25, 2, 141 (1970). ² А. Н. Колмогоров, ДАН, 119, № 5, 861 (1958). ³ В. А. Рохлин, УМН, 15, 4, 3 (1960). ⁴ В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Теория вероятностей и ее применение, 4, 2, 186 (1959). ⁵ Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, УМН, 22, 5, 107 (1967). ⁶ В. А. Рохлин, УМН, 4, 2, 57 (1949). ⁷ Я. Г. Синай, Кандидатская диссертация, МГУ, 1960. ⁸ Я. Г. Синай, Теория вероятностей и ее применение, 7, 2, 213 (1962). ⁹ Я. Г. Синай, ДАН, 133, № 6, 1303 (1960). ¹⁰ M. Rosenblatt, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 42, 1, 43 (1956). ¹¹ И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.