

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 XI 1971)

1. Пусть $\{X_i, f_{si}\}$, $s, i = 0, 1, \dots$, — обратный спектр топологических пространств X_i и непрерывных отображений g_{si} *. Рассмотрим обратный спектр $\{Y_i, g_{si}\}$ пространств Y_s и отображений g_{si} , удовлетворяющих условиям: 1) $Y_0 = X_0$, $X_i \subset Y_i$, $i \geq 1$, 2) Y_{i+1} — цилиндр отображения $f_{i+1, i}$: $X_{i+1} \rightarrow X_i \subset Y_i$, а $g_{i+1, i}$ — ретракция цилиндра отображения $f_{i+1, i}$ (5) на основание Y_i . Очевидно, пространства Y_i и отображения $g_{i+1, i}$, удовлетворяющие условиям 1), 2), существуют и определены этими условиями однозначно. Из условий 1) и 2) вытекает, что пространства $X_0, X_1, \dots$, а также предельное пространство $X_\infty = \lim \{X_i, f_{si}\}$ содержатся в предельном пространстве $Y_\infty = \lim \{Y_i, g_{si}\}$ в качестве замкнутых нигде не плотных множеств и попарно не пересекаются, $\dim Y_i = \dim X_i + 1$, $i \geq 1$, $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_\infty$, причем множества $Y_0, Y_1, \dots$ покрывают пространство $Y_\infty \setminus X_\infty$, а множества $X_1, X_2, \dots$ разбивают пространство Y_∞ . Нетрудно проверить также, что каждое Y_i является сильным деформационным ретрактом пространства Y_∞ . В дальнейшем мы всюду предполагаем, что X_0 — одноточечное пространство; поэтому всегда Y_∞ — стягиваемое пространство.

Если X_i — симплициальные комплексы (4), а $f_{i+1, i}$ симплициально отображают X_{i+1} в некоторое подразделение комплекса X_i , то Y_i можно рассматривать как симплициальные комплексы. Пространства комплексов Y_i в метрической топологии будем обозначать через $\hat{X}_i$. Если пространство X всюду плотно в пространстве $X_\infty = \lim \{|X_i|, f_{si}\}$, где $|X_i|$ — пространства комплексов в метрической топологии, то пространство $Y_\infty = \lim \{\hat{X}_i, g_{si}\}$ будем называть спектральным полиэдром пространства X (порожденным спектром $\{|X_i|, f_{si}\}$) и обозначать через $\hat{X}$. Единственную точку пространства $Y_0 = X_0$ назовем вершиной пространства $\hat{X}$. Нетрудно проверить, что $\hat{X} \setminus X_\infty$ — полиэдр в обычном смысле (т. е. пространство симплициального комплекса в метризуемой топологии), причем $\hat{X} \setminus X_\infty$ — стягиваемое пространство.

Предложение 1. Для всякого метрического пространства X существует спектральный полиэдр $\hat{X}$ того же веса, что и X , и размерности $\dim \hat{X} = \dim X + 1$ **.

Теорема 1. Пусть f — отображение замкнутого подмножества A метрического пространства Y в метрическое пространство X и $\hat{X}$ — некоторый спектральный полиэдр пространства X . Оказывается, что отображение $f: A \rightarrow X \subset \hat{X}$ всегда можно продолжить на Y до отображения $g: Y \rightarrow X$. При этом можно предполагать выполнение следующих условий:

1) $g(Y \setminus A) \subseteq \hat{X} \setminus X_\infty$, причем можно считать, что $g(Y \setminus A)$ содержится в подкомплексе K комплекса $X \setminus X_\infty$ размерности $\dim K \leq \leq \dim (Y \setminus A)$;

* В дальнейшем все отображения предполагаются непрерывными.

** Аналогичная конструкция для компактов была построена С. Лефшецем (3), а исходным материалом для нее послужили аппроксимационные теоремы П. С. Александрова (2). Подобные конструкции имеются также в (6), гл. V, теорема 6.4, и в (13), теорема 3.1.

- 2) если U_i — окрестности множества A в Y , то $g^{-1}(\hat{X} \setminus \hat{X}_i) \subseteq U_i$;
 3) если f — гомеоморфизм и $g(x)$ — предельная точка множества $g(S)$, где $x \in A$, $S \subseteq Y$, то x — предельная точка множества S ;
 4) если f — гомеоморфизм и $\mathcal{F}_i$ — локально конечная в Y система подмножеств $F \subseteq Y$, $i = 0, 1, \dots$, то пространство $\hat{X}$ и отображение g можно выбрать таким образом, что выполнены предыдущие условия и система множеств $g(F)$, $F \in \mathcal{F}_i$, локально конечна в $\hat{X}$ относительно множества $\hat{X} \setminus \hat{X}_i$, причем, если пространство X локально конечномерно, то $\hat{X}$ также можно считать локально конечномерным пространством*.

Замечание. Если X — полиэдр, то конус $C(X)$ над X в метризуемой топологии является в то же время и спектральным полиэдром пространства X . Однако в общем случае $C(X) \neq \hat{X}$. Нетрудно проверить также, что отображение $f: A \rightarrow X \subset C(X)$ тогда и только тогда можно продолжить на Y до отображения $g: Y \rightarrow C(X)$, когда f можно продолжить на некоторую окрестность $O(A)$ в Y до отображения $g': O(A) \rightarrow X$.

II. Точку $x \in X$ назовем особой точкой пространства X **, если замыкание любой ее окрестности в X бесконечномерно. Множество всех особых точек пространства X будем обозначать через X' . Очевидно, X' замкнуто в X , а множество $X \setminus X'$ локально конечномерно. Пространство X назовем всюду бесконечномерным, если $X' = X$.

Для любого бесконечномерного пространства X обозначим через $\mathcal{D}(X)$ максимальную вполне упорядоченную убывающую систему замкнутых в X множеств $X_\alpha \subseteq X$, где α — все порядковые числа, не превосходящие некоторого порядкового числа γ , удовлетворяющих условиям: а) множества X_α попарно различны и бесконечномерны за исключением, быть может, одного, последнего (возможно, пустого) множества X_γ , которое мы будем обозначать также через $R(X)$; б) $X_0 = X$; в) $X_{\alpha+1} = X'_\alpha$, $\alpha < \gamma$; г) $X_\alpha = \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi$, если α — предельное число. Максимальная система $\mathcal{D}(X)$ определена условиями а) — г) однозначно. Порядковый тип γ вполне упорядоченного множества $\mathcal{D}(X) \setminus \{R(X)\}$ обозначим через $\text{der } X$ (если $\hat{X}$ конечномерно, то положим, по определению, $\text{der } X = 0$). Из перечисленных условий вытекают также условия: д) множество $R(X)$ либо конечномерно, либо является максимальным замкнутым всюду бесконечномерным подмножеством пространства X ; е) множество $X_\beta \setminus R(X)$ нигде не плотно в X_α при $\alpha < \beta$; если $R(X)$ конечномерно, то X_β нигде не плотно в X_α ; ж) мощность числа $\text{der } X$ не превосходит веса пространства X .

Определение. Пространство X назовем d -пространством, если множество $R(X)$ конечномерно, т. е. согласно условию д) в X нет замкнутого всюду бесконечномерного подпространства*, а из условия е) вытекает, что всякое замкнутое в X множество локально конечномерно с точностью до своего замкнутого нигде не плотного подмножества***.

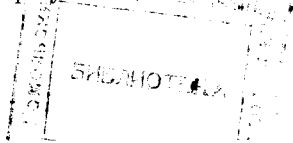
Очевидно, для любого пространства X пространство $X \setminus R(X)$ является d -пространством. Справедливы следующие утверждения:

1) Если слабосчетномерное пространство $\hat{X}$ (т. е. счетная сумма своих замкнутых конечномерных подмножеств X^i) полно в смысле Чеха, то X — d -пространство.

* Под размерностью, если противное явно не оговорено, всюду подразумевается размерность $\dim$.

** Все пространства в дальнейшем предполагаются нормальными.

*** В ⁽¹¹⁾ определяется трансфинитная размерность $D(X)$. Из теоремы ⁽¹²⁾ следует, что $D(X)$ — порядковое число тогда и только тогда, когда X — d -пространство, причем $D(X) = \omega \text{ der } X + \dim R(X)$, а из теоремы 2 настоящей работы вытекает справедливость. Предположения из ⁽¹²⁾. Некоторые из излагаемых ниже результатов в незаконченной форме получены для пространств со счетной базой также в ⁽¹⁶⁾. Уже после того, как пункт а) теоремы 2 (см. далее) был доказан автором для пространств со счетной базой, Люксембург ⁽¹⁷⁾ стал рассматривать пространства, аналогичные d -пространствам, и получил свои результаты независимо.



В самом деле, если $R(X)$ всюду бесконечномерно, то $R(X)$ — множество первой категории в себе (ибо $R(X)$ — счетная сумма своих замкнутых конечномерных подмножеств $R(X) \cap X^i$, а всякое конечномерное подмножество всюду бесконечномерного пространства нигде не плотно в этом пространстве). Но это невозможно, так как X полно в смысле Чеха, а $R(X)$ замкнуто в X .

2) Метрическое d -пространство X слабосчетномерно и имеет слабосчетномерное пополнение Z такое, что $Z_\alpha = [X_\alpha]_Z^*$, $\alpha \leq \text{der } X$, $\dim R(Z) = \dim R(X)$.

Заметим, что бикompактное d -пространство Y может и не быть слабосчетномерным даже в случае, когда $\text{der } Y$ — конечное число.

3) Открытое подмножество G d -пространства X есть d -пространство такое, что множество $G_\alpha \in \mathcal{D}(G)$ определено и непусто тогда и только тогда, когда определено и непусто множество $X_\alpha \cap G$, $X_\alpha \in \mathcal{D}(X)$, и имеет место равенство $G_\alpha = X_\alpha \cap G$.

4) Замкнутое подмножество F d -пространства X есть d -пространство такое, что $\text{der } F \leq \text{der } X$ и $F_\alpha \subseteq X_\alpha$ для любого $\alpha \leq \text{der } F$.

Если X — метрическое пространство, то это утверждение справедливо для произвольных подмножеств $F \subseteq X$.

Из утверждений 1), 2) и 4) вытекает

Предложение 2. Метрические d -пространства — это в точности подмножества полных слабосчетномерных метрических пространств.

5) Пусть $X = \bigcup_{i=1}^k X^i$, $k < \infty$, X^i — d -пространства. Тогда X — d -пространство такое, что $\text{der } X \leq \sigma(\text{der } X^1, \dots, \text{der } X^k)^{**}$.

6) Если в утверждении 5) множества X^i замкнуты в X , то $\text{der } X = \max_i \text{der } X^i$ и $X_\alpha = \bigcup X_{\alpha^i}$, где суммирование ведется по тем $i \leq k$, для которых множество $X_{\alpha^i} \in \mathcal{D}(X^i)$ определено.

Для бесконечного числа слагаемых утверждения 5) и 6), вообще говоря, не верны, так как даже счетная сумма конечномерных кубов может быть всюду бесконечномерным пространством. Однако справедливо

7) Если $X = \bigcup_{\alpha} X^\alpha$, где $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов, а d -пространства X^α открыты в X , то X — d -пространство такое, что $X_\xi = \bigcup X_{\xi^\alpha}$, где сумма берется по тем $\alpha \in \mathcal{A}$, для которых множество $X_{\xi^\alpha} \in \mathcal{D}(X^\alpha)$ определено.

Из 5) и 7) вытекает

8) Локально конечная сумма d -пространств есть d -пространство.

9) Если $X = G \cup F$, G, F — d -пространства, G открыто, а F замкнуто в X , то X — d -пространство такое, что $\text{der } X \leq \text{der } G + \text{der } F$.

10) Если X, Y — бикompактные или метризуемые d -пространства, то $X \times Y$ — d -пространство такое, что $\text{der } (X \times Y) \leq \sigma(\text{der } X, \text{der } Y)^{**}$, $R(X \times Y) = R(X) \times R(Y)$; если $R(X \times Y) \neq \Lambda$, т. е. $R(X) \neq \Lambda$, $R(Y) \neq \Lambda$, то $\text{der } (X \times Y) = \sigma(\text{der } X, \text{der } Y)$ (если Z — бесконечномерный бикompакт, то всегда $R(Z) \neq \Lambda$).

С помощью утверждений 5), 7) и 10) можно показать, что для любой мощности $\aleph_\alpha$, любого порядкового числа $\eta < \omega_{\alpha+1}$ и любого натурального n существует полное метрическое пространство (компакт, если $\alpha = 0$) $X^{\eta n}$ веса $\aleph_\alpha$ такое, что $\text{der } X^{\eta n} = \eta$, $\dim R(X^{\eta n}) = n$. Из этого факта, условия ж) и утверждения 4) для метрических пространств вытекает, что в классе метрических d -пространств данного веса (компактных d -пространств) не существует универсального. Так как согласно утверждениям 1) и 2) классы полных слабосчетномерных метрических пространств (ком-

* Здесь и далее для каждого пространства Z и каждого порядкового числа $\alpha \leq \text{der } Z$ через Z_α мы обозначаем элемент системы $\mathcal{D}(Z)$ с номером α ; $[A]_Z$ — замыкание A в Z .

** $\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — натуральная сумма порядковых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в смысле (1).

пактов) и полных метрических d -пространств (компактных d -пространств) совпадают, то справедливо

Предложение 3. В классе полных слабосчетномерных метрических пространств данного веса (в классе слабосчетномерных компактов) не существует универсального.

11) Для метрических d -пространств малая индуктивная размерность $\text{ind } X$ существует и $\text{ind } X \leq \omega \text{ der } X + \dim R(X)$; если размерность $\text{Ind } X$ существует, то также $\text{Ind } X \leq \omega \text{ der } X + R(X)$, где ω — первое трансфинитное число.

12) Из результатов работ ⁽⁸⁾ и ⁽⁹⁾ вытекает, что если X — метрическое пространство и $\text{Ind } X$ существует, то $\text{der } X < \omega_1$.

Воспользовавшись конструкцией теоремы 4 из ⁽¹¹⁾, можно для любых $\gamma, \beta < \omega_{\alpha+1}$ и $n < \omega$ таких, что $\gamma \leq \omega\beta + n$, построить метрические пространства (компакты, если $\alpha = 0$) $X^{\gamma\beta n}$ веса $\aleph_\alpha$ такие, что $\text{ind } X^{\gamma\beta n} = \gamma$, $\text{der } X^{\gamma\beta n} = \beta$, $\dim R(X^{\gamma\beta n}) = n$ (в предположении, что метрические пространства X веса $\aleph_\alpha$ с $\text{ind } X = \gamma$ существуют *), и получить отсюда соответствующее утверждение об отсутствии универсального метрического d -пространства данного веса с заданной малой индуктивной размерностью.

13) Для компактов Q^ω Ю. М. Смирнова ⁽⁷⁾ $\text{der } Q^{\omega_1+n} = \aleph_n$, $\dim R(Q^{\omega_1+n}) = n$.

Лемма. Пусть X — метрическое пространство и $\mathcal{D}$ - вполне упорядоченная строго убывающая система замкнутых в X множеств X_α , где α — все порядковые числа, меньшие некоторого числа γ . Оказывается, существуют открытые в X множества U_α такие, что $X_\alpha \setminus X_{\alpha+1} \subseteq U_\alpha \subseteq X \setminus X_{\alpha+1}$, $\alpha < \gamma$, и система множеств U_α , $\gamma \leq \alpha < \gamma$, локально конечна относительно открытого множества $X \setminus X_\gamma$, $\gamma < \gamma$.

Теорема 2. а) Для всякого метрического d -пространства X веса τ существует бикомпактное расширение B веса τ такое, что B есть слабосчетномерное d -пространство и $\text{der } B \leq \text{der } X$;

б) если X — пространство со счетной базой, то можно считать, что B — компакт такой, что $\text{der } B = \text{der } X$, $X_\alpha = B_\alpha \cap X$ для любого $\alpha \leq \text{der } B = \text{der } X$, $\dim R(B) \leq \dim R(X) + 1$ и множество $B_\alpha \setminus [X_\alpha]_\gamma$ является подмножеством локально конечномерного полиэдра.

Следствие. Всякое полное слабосчетномерное метрическое пространство имеет слабосчетномерное бикомпактное расширение того же веса **.

Автор выражает благодарность Б. А. Пасынкову за ценные советы и замечания.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. ² П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. ³ S. Lefschetz, Topology, N. Y., 1930. ⁴ Н. Стинрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, М., 1958. ⁵ Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., 1964. ⁶ K. Borsuk, Theory of Retracts, Warszawa, 1967. ⁷ Ю. М. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 2 (1959). ⁸ Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., 58, № 4 (1962). ⁹ Е. Г. Скляренко, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 2 (1959). ¹⁰ Е. Г. Скляренко, ДАН, 123, № 1 (1958). ¹¹ D. W. Henderson, Pacific J. Math., 26, 1, 91 (1968). ¹² D. W. Henderson, Pacific J. Math., 26, 1, 109 (1968). ¹³ J. Dugundji, Pacific J. Math., 1, 353 (1951). ¹⁴ Б. Т. Левшенко, Матем. сборн., 67, № 2 (1965). ¹⁵ A. W. Schurle Trans. Am. Math. Soc., 136, 25 (1969). ¹⁶ Z. Shmucly, Duke Math. J., 38, 1 (1971). ¹⁷ Л. Люксембург, ДАН, 199, № 6 (1971).

* Неизвестно, существуют ли метрические пространства с $\text{ind } X > \omega_1$.

** Для пространств со счетной базой это утверждение доказано в ⁽¹⁵⁾.