Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. ДЖУРАЕВ

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 5 X 1971)

Пусть G — ограниченная область в комплексной плоскости z, граница которой γ состоит из конечного числа замкнутых кривых класса C_ν^1, $0 < \nu < 1$, $a_j(z)$, $b_j(z)$, $c_j(z)$ — комплекснозначные функции класса $C^1(G) \cap C_\nu(\overline{G})$, а $d_j(z)$, $e_j(z)$, $g(z)$ — комплекснозначные функции класса $C_\nu(\overline{G})$, заданные в области G, $j = 1, 2$.

Рассмотрим в G уравнение

$$K(\omega) \equiv a_1(z)\omega(z) + a_2(z)\overline{\omega(z)} + b_1(z)S(\omega) + b_2(z)S(\overline{\omega}) + c_1(z)\overline{S(\omega)} + c_2(z)\overline{S(\overline{\omega})} + d_1(z)T(\omega) + d_2(z)T(\overline{\omega}) + e_1(z)\overline{T(\omega)} + e_2(z)\overline{T(\overline{\omega})} = g(z), \tag{1}$$

где $S(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_G \frac{\omega(\zeta)\,dG_\zeta}{(\zeta - z)^2}$ — сингулярный интегральный оператор, $T(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_G \frac{\omega(\zeta)\,dG_\zeta}{\zeta - z}$ — вполне непрерывный оператор.

Введем в рассмотрение квадратные матрицы второго порядка $a(z) = (a_{ij})$, $a_0(z) = (a_{ij}^0)$, $b(z) = (b_{ij})$, $c(z) = (c_{ij})$, $d(z) = (d_{ij})$, $e(z) = (e_{ij})$ с элементами $a_{1j} = a_j(z)$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$; $a_{1j}^0 = a_{21}^0 = 0$, $a_{22}^0 = -1$; $b_{1j} = b_j(z)$, $b_{2j} = 0$; $c_{1j} = c_j(z)$, $c_{2j} = 0$; $d_{1j} = d_j(z)$, $d_{2j} = 0$; $e_{1j} = e_j(z)$, $e_{2j} = 0$, а также квадратные матрицы четвертого порядка

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} a(z) - b(z), & a_0(z) - c(z) \\ \overline{a_0(z)} - \overline{c(z)}, & \overline{a(z)} - \overline{b(z)} \end{pmatrix}, \quad B_0(z) = \begin{pmatrix} i\,[a(z) + b(z)], & -i\,[a_0(z) + c(z)] \\ i\,[\overline{a_0(z)} + \overline{c(z)}], & -i\,[\overline{a(z)} + \overline{b(z)}] \end{pmatrix}$$

В настоящей работе мы построим теорию уравнения (1) при следующих предположениях: при $z \in \overline{G}$ выполняется неравенство

$$\Delta(z) = \det A_0(z) = |a_1(z) - b_1(z) - c_2(z)|^2 - |a_2(z) - b_2(z) - c_1(z)|^2 \neq 0$$

и алгебраическое уравнение относительно λ $\det(P(z) + \lambda E) = 0$, где $P(z) = A_0^{-1}(z)B_0(z)$, E — единичная матрица, в области $\overline{G}$ не имеет ни вещественных, ни кратных корней.

Пусть $\lambda = \lambda_j(z)$ — корни уравнения $\det(P(z) + \lambda E) = 0$ с отрицательными мнимыми частями в $\overline{G}$ $\operatorname{Im}\lambda_j(z) < 0$, $j = 1, 2$. Обозначим через $\chi^{(j)}(z) = (\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \chi_3^{(j)}, \chi_4^{(j)})$ комплекснозначный вектор, являющийся в $\overline{G}$ нетривиальным решением однородной алгебраической системы $(P'(z) + \lambda E)\chi = 0$ при $\lambda = \lambda_j(z)$, $j = 1, 2$, а через $\alpha(z) = (\alpha_{ij})$, $\beta(z) = (\beta_{ij})$, $\gamma(z) = (\gamma_{ij})$, $\delta(z) = (\delta_{ij})$ — квадратные матрицы второго порядка с элементами $\alpha_{ij} = \chi_j^{(i)}(z)$; $\beta_{ij} = \chi_{2+j}^{(i)}(z)$;

$$\gamma_{11} = \Delta^{-1}(z)\{d_1(z)\,(\overline{a_1(z)} - \overline{b_1(z)} - \overline{c_2(z)}) - \overline{e_1(z)}\,(a_2(z) - b_2(z) - c_1(z))\},$$
$$\gamma_{12} = \Delta^{-1}(z)\{e_2(z)\,(\overline{a_1(z)} - \overline{b_1(z)} - \overline{c_2(z)}) - \overline{d_2(z)}\,(a_2(z) - b_2(z) - c_1(z))\},$$

$$\gamma_{21} = \Delta^{-1}(z)\{\overline{e_1(z)}(a_1(z)-b_1(z)-c_2(z)) - d_1(z)\overline{(a_2(z)-b_2(z)-c_1(z))}\},$$
$$\gamma_{22} = \Delta^{-1}(z)\overline{\{d_2(z)}(a_1(z)-b_1(z)-c_2(z)) - e_2(z)\overline{(a_2(z)-b_2(z)-c_1(z))}\};$$
$$\delta_{11} = \overline{\gamma_{21}}, \quad \delta_{12} = \overline{\gamma_{22}}, \quad \delta_{21} = \overline{\gamma_{11}}, \quad \delta_{22} = \overline{\gamma_{12}}.$$

Так как $\lambda_1(z) \neq \lambda_2(z)$, $z \in \overline{G}$, то нетрудно убедиться, что

$$\det X(z) \neq 0, \quad z \in \overline{G}, \quad X(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \overline{\beta(z)} & \overline{\alpha(z)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть $\chi_{ij}(z)$ — алгебраическое дополнение элемента, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $X(z)$ и $\mu(z) = (\mu_{ij})$, $\nu(z) = (\nu_{ij})$, $\Lambda(z) = (\Lambda_{ij})$, $Q(z) = (Q_{ij})$ — квадратные матрицы второго порядка с элементами $\mu_{ij} = \chi_{ji}(z)$, $\nu_{ij} = \chi_{2+j,i}(z)$, $\Lambda_{jj} = \lambda_j(z)$, $Q_{jj} = q_j(z) = (\lambda_j(z)+i)(\lambda_j - i)^{-1}$, $\Lambda_{ij} = Q_{ij} = 0$, $i \neq j$, а

$$A^0(z) = (E + i\Lambda(z))^{-1}A_*(z), \quad B^0(z) = (E + i\Lambda(z))^{-1}B_*(z),$$
$$2f^0(z) = (E + i\Lambda(z))^{-1}f_*(z),$$

где

$$A_*(z) = (\det X(z))^{-1}\}\{(\alpha_x - \Lambda(z)\alpha_y - \alpha(z)\gamma(z) - \beta(z)\overline{\delta(z)})\mu(z) + (\beta_x - \Lambda(z)\beta_y - \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\overline{\gamma(z)})\overline{\nu(z)}\},$$
$$B_*(z) = (\det X(z))^{-1}\{\alpha_x - \Lambda(z)\alpha_y - \alpha(z)\gamma(z) - \beta(z)\overline{\delta(z)})\nu(z) + (\beta_x - \Lambda(z)\beta_y - \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\overline{\gamma(z)})\overline{\mu(z)}\},$$
$$f_*(z) = (\det X(z))^{-1}\{\mu(z)f(z) + \nu(z)\overline{f(z)}\}, \quad f(z) = (g_*(z), \overline{g_*(z)}),$$
$$g_*(z) = (\overline{a_1(z)} - \overline{b_1(z)} - \overline{c_2(z)})g(z) - (a_2(z) - b_2(z) - c_1(z))\overline{g(z)}.$$

Дополнение области G до полной плоскости обозначим CG.

Лемма 1. *Если $\omega(z)$ — решение класса $C^\nu(\overline{G})$ уравнения* (1), *то вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)$ с компонентами, равными $\varphi_j(z) = \chi_1^{(j)}(z)T(\omega) + \chi_2^{(j)}(z)T(\overline{\omega}) + \chi_3^{(j)}(z)\overline{T(\omega)} + \chi_4^{(j)}(z)\overline{T(\overline{\omega})}$ при $z \in G$ и $\varphi_1(z) = T(\omega)$, $\varphi_2(z) = T(\overline{\omega})$ при $z \in CG$, будет на всей плоскости кусочно-регулярным решением класса $C_\nu(\overline{G}) \cap C_\nu(\overline{CG})$ эллиптической системы*

$$\varphi_{\overline{z}} - Q(z)\varphi_z - A(z)\varphi - B(z)\overline{\varphi} = f(z), \tag{3}$$

исчезающим на бесконечности и удовлетворяющим краевому условию на γ

$$\varphi^+(t) = \alpha(t)\varphi^-(t) + \beta(t)\overline{\varphi^-(t)}, \tag{4}$$

где $A(z) = A^0(z)$, $B(z) = B^0(z)$, $f(z) = f^0(z)$ при $z \in G$ и $A(z) = B(z) = f(z) \equiv 0$ при $z \in CG$, а $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ — граничные значения на контуре γ вектора $\varphi(z)$ соответственно из областей G и CG.

Обратно, если вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)$ является кусочно-регулярным решением класса $C_\nu(\overline{G}) \cap C_\nu(\overline{CG})$ задачи (3), (4), *исчезающим на бесконечности, то функция $\omega(z) = \Phi_{\overline{z}}$,* где $\Phi(z) = (\det X(z))^{-1}\{\chi_{11}(z)\varphi_1 + \chi_{21}(z)\varphi_2 + \chi_{31}(z)\overline{\varphi_1} + \chi_{41}(z)\overline{\varphi_2}\}$ *при $z \in G$ и $\Phi(z) = \varphi_1(z)$ при $z \in CG$ будет решением класса $C_\nu(\overline{G})$ уравнения* (1).

Однородное сингулярное интегральное уравнение

$$K^*(\chi) \equiv a_1(z)\chi(z) + a_2(z)\overline{\chi(z)} + S(b_1\chi + \bar{c}_1\bar{\chi}) + \overline{S(b_2\chi + \bar{c}_2\bar{\chi})} - T(d_1\chi + \bar{e}_1\bar{\chi}) - \overline{T(d_2\chi + \bar{e}_2\bar{\chi})} = 0 \tag{5}$$

назовем сопряженным по отношению к уравнению (1).

Легко видеть, что операторы K и K^* связаны соотношением

$$\operatorname{Re}\iint_G \chi(z)K(\omega)\,dG_z = \operatorname{Re}\iint_G \omega(z)K^*(\chi)\,dG_z,$$

из которого вытекает, что для разрешимости уравнения (1) необходимо, чтобы функция $g(z)$ удовлетворяла условию

$$\operatorname{Re}\iint_G g(z)\chi(z)\,dG_z = 0,$$

где $\chi(z)$ — решение уравнения (5).

Лемма 2. *Для того чтобы функция* $\chi(z)\in C^1(G)\cap C_\nu(\bar G)$ *была решением уравнения* (5), *необходимо и достаточно, чтобы вектор* $\psi(z)$, *определенный в области* G *равенством*

$$\psi(z) = (E + i\Lambda(z))\{[(a(z) - b(z))\mu(z) + (a_0(z) - c(z))\overline{\nu(z)}]\Omega(z) + \\ + \overline{[(\overline{a_0}(z) - \overline{c}(z))\mu(z) + \overline{(a(z)} - \overline{b}(z))\overline{\nu(z)}]\overline{\Omega(z)}}\},$$

где

$$\Omega(z) = (\chi_1(z), \chi_2(z)),\quad \chi_1(z)\equiv\chi(z),$$
$$\chi_2(z)\equiv\overline{a_2(z)\chi(z)} + \overline{S(b_2\chi + \bar c_2\bar\chi)} - \overline{T(d_2\chi + \bar e_2\bar\chi)},$$

голоморфный в CG *и исчезающий на бесконечности, был кусочно-регулярным решением класса* $C_\nu(\bar G)\cap C_\nu(\overline{CG})$ *сопряженной к* (3) *эллиптической системы*

$$-\psi_{\bar z} + (Q(z)\psi)_z - A'(z)\psi - \overline{B'(z)\psi} = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющим на γ *сопряженному к* (4) *краевому условию*

$$\alpha'(t)(Et'(s) + Q(t)\overline{t'(s)})\psi^+(t) - \overline{\beta'(t)(\overline{Et'(s)} + \overline{Q(t)}t'(s))\psi^+(t)} = \\ = t'(s)\psi^-(t). \tag{7}$$

Доказательства лемм 1 и 2 проводятся с помощью метода, указанного в [3].

Краевые задачи (3), (4) и (6), (7) являются специальными случаями взаимно сопряженных краевых задач, рассмотренных в [2]. Принимая во внимание леммы 1, 2 и результаты [2], получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $\det\alpha(t)\neq 0$, $t\in\gamma$, *то однородное уравнение, соответствующее уравнению* (1), *и однородное сопряженное уравнение* (5) *могут иметь лишь конечные числа* k *и* k' *линейно независимых* (*над полем вещественных чисел*) *решений, а для разрешимости неоднородного уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\operatorname{Re}\iint_G g(z)\chi_j(z)\,dG_z = 0,\quad 0\leqslant j\leqslant k',$$

где $\{\chi_j(z)\}$ — *полная система линейно независимых решений уравнения* (5).

Теорема 2. *Если* $\det\alpha(t)\neq 0$, $t\in\gamma$, *то для индекса уравнения* (1) *имеет место формула*

$$k - k' = \frac{1}{\pi}\{\arg\det\alpha(t)\}_\gamma.$$

Ясно, что теорема 2 остается в силе также для уравнения $K(\omega) + F(\omega) = g(z)$, где оператор K определен равенством (1), а F — вполне непрерывный оператор вида

$$F(\omega)\equiv\iint_G [K_1(\zeta, z)\omega(\zeta) + K_2(\zeta, z)\overline{\omega(\zeta)}]\,dG_\zeta.$$

Отдел математики с вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
29 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] Б. В. Боярский, ДАН, 124, № 1 (1959). [3] А. Джураев, ДАН, 197, № 6 (1971).