

УДК 517.512.6

МАТЕМАТИКА

В. П. МОТОРНЫЙ

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 8 XII 1971)

Пусть $P_k(x)$ — многочлены Лежандра и $S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$ — частная сумма ряда Фурье интегрируемой на $[-1, 1]$ функции $f(x)$. В 1949 г. Х. Поллард ⁽¹⁾ показал, что $S_n(f; x)$ сходится в среднем к $f(x) \in L_p$, если $1/3 < p < 4$, и указал примеры функций, для которых сходимость не имеет места, если $p < 1/3$ или $p > 4$. Дж. Нейман и У. Рудин ⁽²⁾ дополнили этот результат, установив, что для $p = 1/3$ и $p = 4$ разложение функции $f(x) \in L_p$ в ряд по многочленам Лежандра расходится в пространстве L_p . Для пространств $C_{[-1, 1]}$ и L_1 известны условия, при выполнении которых $S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ в метрике соответствующего пространства. Так, в 1964 г. П. К. Суегин ⁽³⁾ доказал, что $S_n(f; x)$ равномерно сходится к $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, если $\alpha > 1/2$, и привел оценку отклонения $S_n(f; x)$ от $f(x)$, r -я производная которой $f^{(r)}(x) \in \text{Lip } \alpha$:

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leq \frac{C \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}. \quad (1)$$

Из оценки функции Лебега, полученной С. А. Агахановым и Г. И. Натансоном ⁽⁴⁾, следует, что $\ln n$ в правой части неравенства (1) можно убрать. В 1966 г., используя оценку функции Лебега и прием П. К. Суегина, автор ^(5, 6) установил, что любая функция $f(x)$, r -я производная которой удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1-h} |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x+h)| dx \leq Mh^\alpha, \quad h > 0, \quad r = 0, 1, \dots,$$

разлагается в ряд Фурье — Лежандра в пространстве L_1 , если $r + \alpha > 1/4$, и имеет место оценка

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_{L_p} \leq C_r \begin{cases} \frac{\ln n}{n^{2\alpha-1/2}}, & 1/4 < \alpha \leq 1/2, \quad r = 0, \\ \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}, & \alpha + r > 1/2. \end{cases} \quad (2)$$

На наш взгляд, в полученной оценке (2) интересным является то, что с улучшением дифференциально-разностных свойств функции менее проявляется влияние норм $\|S_n\|$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/4} \|S_n\| > 0$). В некотором смысле аналогичное явление имеет место в случае приближения периодических функций частными суммами их рядов Фурье по тригонометрической системе (см. ⁽⁷⁾). Вопрос о сходимости разложения функций в ряд по многочленам Якоби в пространствах интегрируемых с весом функций также рассматривался в недавней работе Б. Муккенхоупта ⁽⁸⁾.

В настоящей работе предлагаются условия на функцию $f(x)$, при которых $S_n(f; x)$ сходится в пространстве L_p к $f(x)$ для $1 < p \leq 4/3$ и $4 \leq p < \infty$.

Обозначим через $H_p^{(r+\alpha)}$ класс функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$ и имеющих r -ю производную $f^{(r)}(x) \in L_p$, для которой при любом $0 < h < 1$ выполняется неравенство

$$\left\{ \int_{-1}^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p dx \right\}^{1/p} \leq M h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Из неравенства (9)

$$\|P_n(x)\|_{L_q} \leq C n^{2(1/p-1/q)} \|P_n(x)\|_{L_p}.$$

(где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше n , $1 \leq p < q \leq \infty$, C — постоянная, не зависящая от n, p, q) и результата Х. Полларда легко получается следующее

Утверждение. Пусть $4 \leq p \leq \infty$, $f(x) \in H_p^{(r+\alpha)}$ где $\alpha > 1/2 - 2/p$, если $r = 0$.

Тогда $S_n(f; x)$ сходится к $f(x)$ в L_p и имеет место оценка

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_{L_p} \leq C_q n^{2(1/q-1/p)-\alpha-r},$$

где q — любое число, удовлетворяющее условию $r + \alpha > 2/q - 2/p > 1/2 - 2/p$.

При $p = \infty$ отсюда следует теорема П. К. Суетина с несколько худшей оценкой $\|f - S_n(f)\|_{L_p}$. Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq 4/3$ и $\gamma \geq 2/p - 3/2$.

Тогда для любой функции $f(x) \in L_p$ справедливо неравенство

$$\|S_n(f; x)\|_{L_p} \leq \begin{cases} C_{\gamma, p} \|f(x) (\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^{-\gamma}\|_{L_p}, & \gamma > 2/p - 3/2, \\ C_p \ln^{1/q} n \|f(x) (\sqrt{1-x^2} + n^{-1})^{-\gamma}\|_{L_p}, & \gamma = 2/p - 3/2, \\ 1/p + 1/q = 1. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $4 \leq p < \infty$. Для любой функции $f(x) \in L_p$ имеет место неравенство

$$\|S_n(f; x)\|_{L_p} \leq \begin{cases} C_p n^{1/2-2/p} \|f(x)\|_{L_p}, & \text{если } p > 4, \\ C \ln n \|f(x)\|_{L_p}, & \text{если } p = 4. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq 4/3$, $f(x) \in H_p^{(r+\alpha)}$, где $\alpha > 1/p - 3/4$, если $r = 0$.

Тогда

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_{L_p} \leq \begin{cases} \frac{C \ln n}{n^{2\alpha-2/p+3/2}}, & \frac{2}{p} - \frac{3}{2} \geq \alpha > \frac{1}{p} - \frac{3}{4}, \quad r = 0, \\ \frac{C_{r,p}}{n^{r+\alpha}}, & \alpha + r > \frac{2}{p} - \frac{3}{2}, \end{cases}$$

где $C_{r,p}$ зависит только от r и p ($r \geq 1$), $C_{0,p}$ зависит от α и p .

Теорема 4. Пусть $4 \leq p < \infty$, $f(x) \in H_p^{(r+\alpha)}$, где $\alpha > 1/2 - 2/p$, если $r = 0$.

Тогда

$$\|f(x) - S_n(f; x)\|_{L_p} \leq \begin{cases} C_{p,r} n^{1/2-2/p-\alpha-r}, & \text{если } p > 4, \\ C_r \ln n \cdot n^{-\alpha-r}, & \text{если } p = 4. \end{cases}$$

Теорема 4 непосредственно вытекает из теоремы 2. Теорема 3 является следствием теоремы 1 и следующего утверждения (см. (5, 6)).

Теорема 5. Если $f(x) \in H_p^{(r+\alpha)}$ то существует постоянная C_r , зависящая только от r , такая, что для любого $n \geq 0$ найдется алгебраический многочлен степени $\leq n$, удовлетворяющий неравенству

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{(V1 - x^2 + n^{-1})^{r+\alpha}} \right\| \leq C_r \frac{\ln^{1/p} n}{n^{r+\alpha}};$$

В n можно заменить постоянной $C_{\alpha'}$, если в левой части α заменить на $\alpha' < \alpha$ ($C_{\alpha'} \rightarrow \ln n$; $C_{\alpha'}$ ограничена для $\alpha' \leq \alpha_0 < \alpha$).

Днепропетровский
государственный университет

Поступило
20 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Pollard, Duke Math. J., **16**, № 1, 189 (1949). ² J. Neuman, W. Ludin, Proc. Am. Math. Soc., **3**, 219 (1952). ³ П. К. Суетин, ДАН, **158**, № 6, 1275 (1949). ⁴ С. А. Агаханов, Г. И. Натансон, ДАН, **166**, № 1, 9 (1966). ⁵ В. П. Моторный, ДАН, **172**, № 3, 537 (1967). ⁶ В. П. Моторный, Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p . Кандидатская диссертация, Днепропетровск, 1967. ⁷ С. А. Теляковский, Матем. записки, **4**, № 3, 291 (1968). ⁸ В. Muckenhoupt, Proc. Am. Math. Soc., **23**, № 2, 306 (1969). ⁹ А. Ф. Гиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.