

В. И. ПАУЛАУСКАС

О ФУНКЦИЯХ КОНЦЕНТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 XII 1971)

1. Если ξ — одномерная случайная величина, то ее функция концентрации (ф.к.) $q(\xi, \lambda)$ определяется для всех $\lambda > 0$ равенством

$$q(\xi, \lambda) = \sup_x P\{x \leq \xi < x + \lambda\}.$$

Наиболее интересным предметом, связанным с ф.к., является рассмотрение свойств $q(S_n, \lambda)$, где S_n — сумма n случайных величин. В случае независимых случайных слагаемых исследования, начатые П. Леви ⁽⁶⁾ и А. Н. Колмогоровым ⁽⁴⁾, были продолжены многими авторами; последние результаты и библиографию по этому поводу можно найти в работах ^(3, 5).

В многомерном случае ф.к. были определены (а это можно сделать несколькими способами) и исследовались в работах ^(2, 3, 9, 10).

Обозначим $\Sigma_\rho = \{x \in R_k: |x| < \rho\}$, $0 < \rho \in R_1$, $D_\lambda = \{x \in R_k: |x_i| < \lambda_i\}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R_k$. Если X — k -мерный случайный вектор (с.в.), A — некоторое борелевское множество из R_k , то $Q(X, A) = \sup_{x \in R_k} P\{X \in$

$\in A + x\}$. Б. А. Севастьяновым ⁽¹⁰⁾ были введены более общие ф.к. Пусть $\mathcal{E}_i(v)$, $1 \leq i \leq k$, $v > 0$, обозначает класс всех выпуклых универсально измеримых множеств в R_k , пересечения которых со всякими гиперплоскостями размерности i имеют i -мерный объем, не превосходящий v . Тогда $Q_i(X, v) = \sup_{A \in \mathcal{E}_i(v)} P\{X \in A\}$. В этих обозначениях в работах ⁽²⁾ и

⁽³⁾ рассматривались ф.к. $Q(S_n, D_\lambda)$ и $Q(S_n, \Sigma_\rho)$, где $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, X_i — неза-

висимые с.в., а в ⁽⁹⁾ была доказана гипотеза Севастьянова о поведении $Q_i(S_n, v)$ по отношению к n в случае независимых и одинаково распределенных слагаемых.

Приводимые ниже результаты являются продолжением упомянутых работ.

Буквой C будем обозначать абсолютные константы, а через $C(\cdot)$ — константы, зависящие лишь от параметров, указанных в скобках.

2. Лемма. Для любого с.в. $X = (X_1, \dots, X_k)$ и $v > 0$ имеет место неравенство

$$Q_1(X, v) \leq \inf_{|t|=1} q((X, t), v), \quad t \in R_k, \quad (1)$$

в частности, $Q_1(X, v) \leq \min_{1 \leq i \leq k} q(X_i, v)$.

Неравенство (1) является довольно грубым, но зато оно имеет очень большую область применения. Так, например, если $X \equiv S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, где X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — независимые с.в., то оценка $Q_1(S_n, v)$ посредством (1) сводится к оценке ф.к. одномерной случайной величины $S_{n,t} = \sum_{i=1}^n (X_i, t)$ —

суммы независимых случайных величин. Если с.в. X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, связаны некоторой зависимостью (например, m -зависимы, связаны в цепь

Маркова), то такой же зависимостью будут связаны и одномерные случайные величины (X_i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$, $|t| = 1$. Далее, если X — безгранично делимый с.в., то безгранично делимыми будут случайные величины (X, t) , $|t| = 1$, и это позволяет применять одномерный результат из (3) для оценки ф.к. $Q_1(X, v)$.

В качестве примера сказанного приведем несколько оценок в случае независимых слагаемых, полученных применением (1) и результата из (3). Если X — с.в. с распределением $P(A)$, то через X^* будем обозначать симметризованный с.в. и $P^*(A) = P\{X^* \in A\}$. Обозначим

$$D^2(\xi, \lambda) = \lambda^{-2} \int_{|x| < \lambda} x^2 dF(x) + \int_{|x| \geq \lambda} dF(x),$$

где ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, $\lambda > 0$. Свойства функции $D^2(\xi, \lambda)$ приведены в (3).

Теорема 1. Пусть $X_i = (X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \dots, n$, — независимые с.в. с распределениями P_i , $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Тогда для любых $0 < v_i \leq v$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} Q_1(S_n, v) &\leq Cv \cdot \inf_{|t|=1} \frac{\sum_1^n v_i^2 D^2((X_i^*, t), v_i) q((X_i, t), v)}{\left\{ \sum_1^n v_i^2 D^2((X_i^*, t), v_i) \right\}^{3/2}} \leq \\ &\leq Cv \left\{ \sup_{|t|=1} \sum_1^n v_i^2 \left[\frac{1}{v_i^2} \int_{|x| < v_i} (x, t)^2 P_i^*(dx) + \int_{|(x, t)| \geq v_i} P_i^*(dx) \right] \right\}^{-1/2} \leq \\ &\leq Cv \left\{ \sup_{|t|=1} \sum_1^n v_i^2 [1 - q((X_i^*, t), v_i)] \right\}^{-1/2} \leq \\ &\leq Cv \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sum_1^n v_i^2 [1 - q(X_i^{(i)*}, v_i)] \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Следствие 1. Если с.в. X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, независимы и одинаково распределены, $0 < \tau < v$, то

$$Q_1(S_n, v) \leq \frac{Cv}{\tau \sqrt{n} \left[1 - \inf_{|t|=1} q((X^{*1}, t), \tau) \right]^{1/2}}. \quad (3)$$

Из сравнения (3) с имеющимися оценками из (3) видно, что оценка (1) имеет еще одно достоинство — отсутствие явной зависимости от размерности k , что позволит перейти к бесконечномерному случаю.

3. Теперь будем рассматривать независимые одинаково распределенные с.в. X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, с невырожденным распределением $P(A)$ (т. е. носитель меры P не сосредоточен ни в каком подпространстве размерности,

меньшей, чем k), $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Формулируемые ниже теоремы являются

многомерными обобщениями результатов Эссеена (3) в одномерном случае; их доказательства проводятся по схеме одномерного случая.

Теорема 2. Если $M|X_1|^2 = \infty$, то для каждого фиксированного $v > 0$

$$Q_1(S_n, v) = o(n^{-k/2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Если $M|X_1|^l < \infty$, $0 < l \leq 2$, тогда

$$Q_1(S_n, v) \geq C(k, l) v^k [v + 2\sqrt{k} (\beta_l(a))^{1/l}]^{-k} n^{-k \cdot l},$$

где $\beta_l(a) = \sum_{i=1}^k \beta_l^{(i)}(a^{(i)})$, $\beta_l^{(i)}(a^{(i)}) = M|X_1^{(i)} - a^{(i)}|^l$, $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(k)}) \in R_k$.

Теорема 4. Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, — независимые невырожденные с.в. с распределением $P(A)$. Для того чтобы существовали константы $C_j(k, P, v), j = 1, 2$, такие, что

$$C_1(k, P, v) n^{-k/2} \leq Q_1(S_n, v) \leq C_2(k, P, v) n^{-k/2},$$

необходимо и достаточно выполнения условия $M|X_1|^2 < \infty$.

4. Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, — независимые с.в. с распределениями $P_i(A)$, γ — некоторое целое число, $0 \leq \gamma < k$, $\chi_j(a) = \inf_{|t|=1} \int_{|x|<a} (t, x)^2 P_j^*(A)$, $p_j(b) = P\{|X_j^*| > b\}$.

Для любых положительных $\rho_j, j = 1, 2, \dots, n$, мы можем определить следующие величины:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n [\rho_j^{2k} p_j(\rho_j) + \rho_j^{2\gamma/k-\gamma} \chi_j(\rho_j)], \\ \beta_j &= \frac{1}{A} \rho_j^{2\gamma/k-\gamma} \chi_j(\rho_j), \quad \gamma_j = \frac{1}{A} \rho_j^{2k} p_j(\rho_j), \\ u &= \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad v = \sum_{j=1}^n \gamma_j, \quad u + v = 1. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, независимые с.в., $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда для всех $0 < \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \leq \rho$ и любого целого $0 \leq \gamma < k$

$$Q_1(S_n, \rho) \leq C(k) \rho^k A^{-1/2 - 1/2(k-\gamma-1)u}.$$

При $\gamma = k - 1$ эта теорема переходит в теорему 6.1 из работы (3).

Оценивая $A \geq \sum_{j=1}^n \rho_j^{2k} [1 - Q(X_j, \Sigma_{\rho_j})]$, получаем

Следствие 2. Для любого целого $0 \leq \gamma < k$

$$Q_1(S_n, \rho) \leq C(k) \rho^k \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_j^{2k} [1 - Q(X_j, \Sigma_{\rho_j})] \right\}^{-1/2 - 1/2(k-\gamma-1)u}. \quad (4)$$

Следствие 3. Пусть с.в. $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, независимы и одинаково распределены, $B_1 = \tau^{2\gamma/(k-\gamma)} \chi_1(\tau)$, $B_2 = \tau^{2k} P\{|X_1^*| > \tau\}$, $B = B_1 + B_2$, $u_1 = B_1/B$, $v_1 = B_2/B$.

Тогда для любого целого $0 \leq \gamma < k$ и всех $0 < \tau \leq \rho$

$$\begin{aligned} Q_1(S_n, \rho) &\leq C(k) \rho^k (B \cdot n)^{-1/2 - 1/2(k-\gamma-1)u_1} \leq \\ &\leq C(k) \rho^k \{n \tau^{2k} [1 - Q(X_1, \Sigma_\tau)]\}^{-1/2 - 1/2(k-\gamma-1)u_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

По сравнению с оценками (6.7) и (6.8) из (3), оценки (4) и (5) точнее ввиду наличия слагаемого $-1/2(k-1-\gamma)u$ в показателе степени.

5. Теперь рассмотрим случай, когда множества, по которым берутся супремум при вычислении ф.к., увеличиваются с увеличением числа слагаемых n . Для оценки $Q(S_n, \Sigma_{\rho_n})$ или $Q_1(S_n, v_n)$, где $\rho_n, v_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ с некоторой скоростью, можно применять уже имеющиеся результаты. Но если рассматривать $Q(S_n, D_{\lambda(n)})$ и только для одного индекса $1 \leq i_0 \leq k$ $\lambda_{i_0}(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то аппроксимация этой ф.к. функцией $Q_1(S_n, v_n)$ будет слишком грубой. Поэтому приводим теорему 6, являющуюся обобщением одного результата Б. Розена (8).

Теорема 6. Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, — независимые невырожденные с.в. с распределением $P(A)$. Если $\lambda_i(n) \leq n^{p_i}$, $0 \leq p_i < 1/2$, $i = 1, 2, \dots, k$,

тогда

$$Q(S_n, D_{\lambda(n)}) \leq C(k, P) n^{-\sum_{i=1}^k (1/2 - p_i)}.$$

Аналогично можно получить оценку в случае $\lambda_i(n) \leq \varepsilon_i \sqrt{n}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

6. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ безгранично делимый с.в. с характеристической функцией

$$g(t) = \exp \left\{ i(t, a) - \frac{1}{2} P(t) + \int \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) M(dx) \right\}, \quad (6)$$

где $P(t)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма от переменных $t_1, t_2, \dots, t_k$; неотрицательная мера M , определенная на борелевских множествах, такая, что $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} M(dx) < \infty$ (7). Знак $\int$ означает, что начало координат исключено из области интегрирования.

Обозначим через $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_k^2$ и $\beta_1^2(a) \leq \beta_2^2(a) \leq \dots \leq \beta_k^2(a)$ собственные значения квадратичных форм $P(t)$ и $\int_{|x| < a} (t, x)^2 M(dx)$ соответственно.

Теорема 7. Если X — с.в. с характеристической функцией (6), тогда справедливы оценки

$$Q_1(X, v) \geq C(k) \exp \left\{ -4 \int_{|x| > v} M(dx) \right\} \prod_{i=1}^k \min \left(\frac{v}{(\alpha_i^2 + \beta_k^2(v))^{1/2}}, C \right),$$

$$Q_1(X, v) \leq C(k) \left\{ \int_{|x| > v} M(dx) + v^{-2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2(v)) \right\}^{-1/2}, \quad x \in R_k,$$

$$Q_1(X, v) \leq C(k) \left(\sup_{u > v} \prod_{i=1}^k \frac{\alpha_i^2 + \beta_1(u)}{u^2} \right)^{-1/2}.$$

Из этих оценок легко вывести многомерный аналог одного результата В. Деблина (4), повторенного также в (3).

Теорема 8. Для того чтобы распределение безгранично делимого с.в. X с характеристической функцией (6) имело хотя бы одну точку роста, необходимо и достаточно выполнения условий

$$P(t) \equiv 0, \quad \int_{R_k} M(dx) < \infty.$$

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило
1 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Doeblin, Bull. Soc. Math. France, 63, 23, 35 (1939). ² C. G. Esseen, Zs. Wahrscheinlichkeitstheorie, 5, 210 (1966). ³ G. G. Esseen, ibid., 9, 290 (1968). ⁴ A. Kolmogorov, Ann. Inst. H. Poincaré, 16, 17 (1958). ⁵ H. Kesten, Math. Scandinavia, 25, 133 (1969). ⁶ P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1954. ⁷ E. Lukacs, Multivariate Analysis — II, N. Y.—London, 1969. ⁸ B. Rosen, Ark. Math., 4, 323 (1961). ⁹ В. В. Сазонов, Теория вероятн. и ее примен., 11, 682 (1966). ¹⁰ Б. А. Севастьянов, Там же, 8, 124 (1963).