

УДК 519.81

МАТЕМАТИКА

Л. С. КУДИНА

НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ ЗАКОНА АРКСИНУСА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 1 XI 1971)

Законом арксинуса называется закон с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Этот закон, как известно, имеет важные приложения в теории вероятностей (см., например, ⁽¹⁾, гл. III, §§ 5, 8). Закон арксинуса является частным случаем законов с бета-плотностями

$$p_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Относительно этих законов см. ⁽²⁾, гл. II, § 4.

В теории разложений вероятностных законов ⁽³⁾ существенным является понятие неразложимого закона. Это понятие аналогично понятию простого числа в обычной арифметике. Напомним, что закон $\Gamma(x)$ называется неразложимым, если из представления его в виде композиции некоторых законов F_1 и F_2 , $F = F_1 * F_2$, следует, что хотя бы один из F_1 , F_2 является единичным, т. е. имеет вид

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad (2)$$

при некотором a .

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 2$, то закон с бета-плотностью $p_{\alpha, \beta}(x)$ является неразложимым.

В частности, является неразложимым и закон арксинуса. Заметим, что законы с бета-плотностью абсолютно непрерывны и сосредоточены на отрезке $[0, 1]$. Вопрос о существовании абсолютно непрерывных неразложимых законов, сосредоточенных на конечном отрезке, был поставлен Г. Крамером ⁽⁴⁾; утвердительный ответ на этот вопрос получил П. Леви ⁽⁵⁾, однако конструкция его примера довольно сложна.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма а. Пусть $F(x)$ — разложимый закон, сосредоточенный на отрезке $[m, M]$.

Тогда существуют два числа, k и l , $m < k < M$, $m < l < M$, такие, что для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} [F(k + 2\varepsilon) - F(k - 2\varepsilon)][F(l + 2\varepsilon) - F(l - 2\varepsilon)] &\geq \\ &\geq [1 - F(M - \varepsilon)]F(m + \varepsilon). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Пусть

$$F = F_1 * F_2, \quad (4)$$

причем ни F_1 , ни F_2 не являются единичными. Обозначим через M_1, M_2 (m_1, m_2) самые правые (левые) точки роста законов F_1, F_2 соответственно. Легко видеть, что

$$m_1 < M_1, \quad m_2 < M_2, \quad M = M_1 + M_2, \quad m = m_1 + m_2.$$

Как известно, из соотношения (4) следуют неравенства

$$F(x_1 + x_2 + 2\varepsilon) - F(x_1 + x_2 - 2\varepsilon) \geq [F_1(x_1 + \varepsilon) - F_1(x_1 - \varepsilon)] \cdot [F_2(x_2 + \varepsilon) - F_2(x_2 - \varepsilon)], \quad (5)$$

$$F(m + \varepsilon) \leq F_1(m_1 + \varepsilon)F_2(m_2 + \varepsilon), \quad (6)$$

$$1 - F(M - \varepsilon) \leq [1 - F_1(M_1 - \varepsilon)] \cdot [1 - F_2(M_2 - \varepsilon)], \quad (7)$$

где x_1, x_2 — любые числа, $\varepsilon > 0$. Полагая в (5) $x_1 = m_1, x_2 = M_2$, а затем $x_1 = M_1, x_2 = m_2$, получим неравенства

$$F(m_1 + M_2 + 2\varepsilon) - F(m_1 + M_2 - 2\varepsilon) \geq F_1(m_1 + \varepsilon)[1 - F_2(M_2 - \varepsilon)],$$

$$F(M_1 + m_2 + 2\varepsilon) - F(M_1 + m_2 - 2\varepsilon) \geq [1 - F_1(M_1 - \varepsilon)]F_2(m_2 + \varepsilon).$$

Перемножая эти неравенства и учитывая (6) и (7), получим

$$[F(m_1 + M_2 + 2\varepsilon) - F(m_1 + M_2 - 2\varepsilon)] \cdot [F(M_1 + m_2 + 2\varepsilon) - F(M_1 + m_2 - 2\varepsilon)] \geq [1 - F(M - \varepsilon)]F(m + \varepsilon),$$

откуда и получаем неравенство (3) с $k = m_1 + M_2, l = M_1 + m_2$.

Для доказательства теоремы применим лемму к закону с плотностью (1). Деля неравенство на ε^2 , получим

$$\begin{aligned} 16 \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} \int_{k-2\varepsilon}^{k+2\varepsilon} p_{\alpha,\beta}(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{4\varepsilon} \int_{l-2\varepsilon}^{l+2\varepsilon} p_{\alpha,\beta}(x) dx \right\} &\geq \\ &\geq \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} p_{\alpha,\beta}(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^1 p_{\alpha,\beta}(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как $0 < k, l > 1$, то в левой части имеем конечный предел. При $\alpha + \beta < 2$ правая часть имеет предел, равный $+\infty$. Получим противоречие.

Из доказанной теоремы следует, что если случайный вектор (X_1, X_2) равномерно распределен на окружности в R^2 , то случайная величина X_1 (и X_2) неразложима. Для доказательства достаточно заметить, что закон распределения величины X_1 лишь линейным преобразованием отличается от закона арксинуса.

Обобщением этого результата является

Теорема 2. Если случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ равномерно распределен на сфере в R^n , то случайный вектор $(X_1, \dots, X_{n-1})$ неразложимый.

В связи с этой теоремой заметим, что если вектор (X_1, X_2, X_3) равномерно распределен на сфере в R^3 , то случайные величины X_1, X_2, X_3 равномерно распределены на отрезке $(^{(2)}, \text{гл. 1, § 10})$ и, следовательно, **разложимы**.

Автор выражает благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и обсуждение работы.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
26 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, I, М., 1967.
² В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, II, М., 1967.
³ Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Л., 1960. ⁴ Н. Стаметт, Ann. Math. Stat., 18, № 2, 165 (1947). ⁵ P. Lévy, C. R., 235, 489 (1952).