Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 517.949.8

МАТЕМАТИКА

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СЕТОЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 29 X 1971)

В этой заметке излагаются некоторые приложения теории сеточных распределений к системам линейных разностных уравнений. Устойчивость разностной задачи Коши в пространствах сеточных распределений представляет обобщение понятия слабой устойчивости, которое исследовалось в работах ([1], [2]). В соответствии с устойчивостью в различных пространствах проводится некоторая классификация устойчивых схем, в частности, выделяется класс гиперболических схем, существенный при построении разностных аппроксимаций гиперболических уравнений (для некоторого класса скалярных схем концепция гиперболичности схемы обсуждалась в ([3])). Рассматривается интересный в практическом плане вопрос о регуляризации решений схем, устойчивых в смысле распределений.

1. Сеточные распределения. Рассмотрим в эвклидовом пространстве E_d семейство сеток $\Omega(h) = \{x \mid x = x_j = jh\}$, $j = (j_1, \ldots, j_d)$, — мультииндекс, пробегающий все целочисленные значения; $h = (h_1, \ldots \ldots, h_d)$, $h_i > 0$,— параметры сетки. Если функция $g(x, h)$ со значениями в L-мерном комплексном пространстве l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, задана на E_d (и, вообще говоря, параметрически зависит от h), функцию $g^h = \{g_j\} = \{g(x_j, h)\}$ называем сеточной функцией, заданной на $\Omega(h)$. Введем обычным образом операторы сдвига $D = (D_1, \ldots, D_d)$ и разделенных разностей $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_d)$, $\partial_s = h_s^{-1}(D_s - E)$.

Введем некоторые линейные топологические пространства сеточных функций. Обозначая $H = h_1 h_2 \ldots h_d$, положим для $m = 1, 2, \ldots$

$$|g^h|_{p,0} = \Big(\sum_j |g_j|_p{}^p H\Big)^{1/p}, \quad |g^h|_{p,m} = \Big(\sum_{|k| \leqslant m} |\partial^k g^h|_p{}^p\Big)^{1/p},$$

где $|g_j|_p$ — норма $g_j \in l_p$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_d$. Обозначим, кроме того, g_r^h сужение функции g^h на шар $|x| \leqslant r$ и положим для любой положительной непрерывной функции $f(r)$

$$|g^h|_{p,m}^{(f)} = \Big(\sum_{|k| \leqslant m} |f\, \partial^k g^h|_p^p\Big)^{1/p}, \quad m = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

Линейное топологическое пространство $\mathfrak{Z}_{hp}(F)$ порождено нормами (1), где функции f принадлежат некоторому классу F. Если F состоит из всех функций указанного вида, обозначаем $\mathfrak{Z}_{hp} = K_{hp}$; если F — множество алгебраических многочленов, обозначаем $\mathfrak{Z}_{hp} = S_{hp}$. Пространства $\mathfrak{Z}_{hp}$ аналогичны пространствам основных функций континуальной теории распределений ([4]).

Элемент $g^h \in \mathfrak{Z}_{hp}$ называем равномерно ограниченным (или бесконечно дифференцируемым в смысле конечно-разностного анализа), если все его нормы ограничены равномерно по h. Кроме того, говорим, что g^h равномерно стремится к φ^h ($g^h \rightrightarrows \varphi^h$), если все нормы функций $g^h - \varphi^h$ равномерно стремятся к нулю. Линейное отображение на $\mathfrak{Z}_{hp}$ называем равномерно ограниченным, если образ равномерно ограниченного элемента равномерно ограничен. Аналогично определяется равномерная ограниченность семейства линейных отображений на $\mathfrak{Z}_{hp}$.

Пусть $\mathfrak{Z}_{hp}^*$ — пространство непрерывных форм на $\mathfrak{Z}_{hp}$, линейных в том смысле, что $u^h(\alpha g^h + \beta\varphi^h) = \bar{\alpha}u^h(g^h) + \bar{\beta}u^h(\varphi^h)$. Если класс F, определяющий топологию $\mathfrak{Z}_{hp}$, содержит неограниченные функции, то $\mathfrak{Z}_{hp}^*$ двойственно $\mathfrak{Z}_{hp}$ относительно билинейной формы

$$u^h(g^h) = \sum_j (u_j, g_j) H, \tag{2}$$

где $(u_j, g_j) = \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant L} u_{j\alpha}\bar{g}_{j\alpha}, \quad u_j \in l_q, \quad q^{-1} = 1 - p^{-1}$.

Равномерно ограниченные элементы $u^h \in \mathfrak{Z}_{hp}^*$ называем сеточными распределениями над $\mathfrak{Z}_{hp}$.

Будем говорить, что распределение регулярно, если для некоторой функции $f(r) \in F$, $f(r) \geqslant 1$,

$$|u^h|_{q,0}^{(1/f)} = \sup_{r>0} f^{-1}(r)\,|u_r^h|_{q,0} < \infty$$

равномерно по h. Всякое сеточное распределение допускает представление

$$u^h = \sum_{|k|\leqslant m} \partial^k U_k^h \tag{3}$$

с регулярными распределениями U_k^h и m, не зависящими от h (m — порядок распределения u^h). Обозначим

$$|u^h|_{q,-m}^{(\varphi)} = \inf\left\{\sum_{|k|\leqslant m} (|U_k^h|_{q,0}^{(\varphi)})^q\right\}^{1/q},$$

где $\varphi(r) = f^{-1}(r)$, $f(r) \in F$, $f \geqslant 1$, а infimum берется по всевозможным U_k^h в представлении (3).

2. Разностные схемы в пространствах сеточных распределений. В полосе $S = E_d \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ рассмотрим семейство сеток $\Omega_\tau = \Omega(h) \times \{t = t^n = n\tau\}$, где $0 < \tau < \tau_0$, $h_i = a_i\tau^{\alpha_i}$, $a_i > 0$, $\alpha_i > 0$. Пусть на сетке Ω_τ задана конечно-разностная схема

$$L_\tau^0(t^n)u^{n+1} = L_\tau^1(t^n)u^n + \tau f_\tau^n, \quad u^0 = \varphi_\tau \tag{4}$$

($L_\tau^\alpha(t)$ — конечно-разностные операторы вида $\sum_k C_k^\alpha(t,x,\tau)D^k$ конечного порядка с коэффициентами $C_k^\alpha(t,x,\tau)$, бесконечно дифференцируемыми по t, x в S при каждом значении τ). Если $\{u^n\}$ — решение (4), обозначаем $u_\tau(t)$ функцию, получаемую линейной интерполяцией между значениями $t = t^n$. Схему (4) называем явной, если $L_\tau^0 = E$. Пусть $R_\tau(t_1, t_0)$, $t_0 \leqslant t_1$, — разрешающий оператор (однородной) схемы (4). Конечно-разностная задача Коши (4) ставится в некотором пространстве $\mathfrak{Z}_\tau$, в качестве которого фигурируют введенные выше пространства $\mathfrak{Z}_{hp}$ и $\mathfrak{Z}_{hp}^*$ (при $h_i = a_i\tau^{\alpha_i}$).

Схему (4) называем регулярной в $\mathfrak{Z}_\tau$, если оператор $L_\tau^0(t)$ имеет в $\mathfrak{Z}_\tau$ равномерно (по t и τ) ограниченный обратный, и устойчивой в $\mathfrak{Z}_\tau$, если она регулярна и оператор $R_\tau(t_1, t_0)$ равномерно (по τ, t_0, t_1, $t_0 \leqslant t_1$) ограничен.

Пусть $G(t', t'', x, y)$ — функция Грина схемы (4), так что оператор $R_\tau(t_1, t_0)$ допускает представление

$$(R_\tau(t^n, t^m)u^m)_j = \sum_k G(t^n - t^m, t^m, x_j - x_k, x_k)\,u^m{}_k H.$$

Для устойчивой схемы нетрудно установить два существенных факта: а) бесконечную дифференцируемость функции Грина по последнему аргументу, б) устойчивость схемы по правой части.

Введем класс гиперболических схем.

Схему (4) называем *гиперболической*, если она явная и ее функция Грина $G(t',t'',x,y)$ при фиксированных t',t'',y допускает представление (3) с (матричными) функциями $U_k^h(t',t'',y)$, обращающимися в нуль вне шара $|x|\leqslant\rho$ и удовлетворяющими для любого $s\geqslant 0$ и любого $r\geqslant 0$ условию

$$\sum_j \max_{|y|\leqslant r} |\partial_y{}^s U_k(t',t'',x_j,y)|_p H < f_s(r) \tag{5}$$

($|\cdot|_p$ обозначает норму числовой матрицы, как оператора в l_p), причем ρ и m не зависит от t',t'',y,τ, функции $f_s(r)$ непрерывны.

Доказывается, что гиперболическая схема устойчива в K_τ и для нее имеют место оценки: для субмультипликативной функции $f(r)$ и любого $s=0,1,\ldots$

$$|R_\tau\varphi^h|_{p,s}^{(f/f_s)}\leqslant C_s f(\rho)|\varphi^h|_{p,s+m}^{(f)} \tag{6}$$

и для любой неубывающей функции $f(r)$, $f\geqslant 1$,

$$|R_\tau\varphi^h|_{p,s}^{(1/ff_s)}\leqslant C_s|\varphi^h|_{p,s+m}^{(1/f)}, \tag{7}$$

где $f_s(r)$ определены неравенствами (5).

В случае схем с постоянными коэффициентами гиперболичность необходима и достаточна для устойчивости в K_τ, а в оценках (6), (7) можно положить $f_s=1$.

Теорема 1. *Гиперболическая схема устойчива в пространстве K_τ^* (сеточных распределений произвольного роста) и для нее имеют место оценки* (6), (7) (*с заменой p на q*) *для любых* $s=0,\pm1,\ldots$

Обратимся к схемам, устойчивым в S_τ. Схему (4) называем S-устойчивой, если ее функция Грина $G(t',t'',x,y)$ допускает для любого $s=0,\pm1,\ldots$ при фиксированных t',t'',y представление

$$G=\sum_{|k|\leqslant m_s}\partial^k B_{ks}{}^h,$$

с функциями $B_{ks}{}^h(t,t'',y)=\{B_{ks}(t',t'',x_j,y)\}$, удовлетворяющими условиям: для всех $m=0,1,2,\ldots$ и некоторых постоянных n_{ms}, C_{ms}

$$\sum_j \max_{|y|\leqslant r}|(1+x_j{}^+)^s\,\partial_y{}^m B_{ks}(t',t'',x_j,y)|_p H < C_{ms}(1+r)^{n_{ms}}, \tag{8}$$

причем m_s не зависят от t',t'',y,τ.

Доказывается, что S-устойчивая схема устойчива в S_τ и удовлетворяет для всех $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и $m=0,1,2,\ldots$ оценкам

$$|R_\tau\varphi^h|_{p,m}^{(1+r)^s}\leqslant a_{sm}|\varphi^h|_{p,m+m_s}^{(1+r)^{s+N_{ms}}},\qquad N_{ms}=\max_{|k|\leqslant m+m_s} n_{ks}, \tag{9}$$

которые аналогичны оценкам (6), (7). Отметим, что в случае постоянных коэффициентов $N_{ms}=0$, причем S-устойчивость необходима для устойчивости схемы в S_τ.

Теорема 2. *S-устойчивая схема устойчива в пространстве S_τ^* (сеточных распределений степенного роста), и для нее при любых s, $m=0,\pm1,\ldots$ справедливы оценки* (9) (*с заменой в них p на q*).

Отметим класс схем с переменными коэффициентами, регулярными в бесконечности (например, постоянными или периодическими вне некоторого шара). Для них, по определению, в условиях (5) и (8) $f_s(r)=\mathrm{const}$, $N_{ms}=0$. В этом случае рассматриваемая здесь устойчивость сводится по существу к слабой устойчивости в смысле ([1], [2]). Отсюда, между прочим, следует, что доказанная в этих работах спектральная теорема устойчивости схем с постоянными коэффициентами справедлива применительно к S-устойчивости, а при очевидных модификациях — и к устойчивости в K_τ и K_τ^*.

3. Регуляризация решений устойчивых схем сглаживанием. Поскольку нормы $|\cdot|_{p,m}$ решений устойчивых схем при $\tau \to 0$, вообще говоря, неограниченно растут, представляет интерес, особенно в практическом плане, вопрос о регуляризации этих решений. Мы рассмотрим простейшую регуляризацию — сглаживание решений по Соболеву и ограничимся лишь устойчивыми схемами с регулярными коэффициентами, для которых из (6), (9) следует оценка

$$|R_\tau(t,0)\varphi_\tau|_{p,m-l} \leqslant c_m|\varphi_\tau|_{p,m}. \tag{10}$$

Пусть $v(t,x)$ — функция, не зависящая от τ, $v^n = v(t^n,x)$, $v^0 = \varphi$.

Положим $w_\tau^n = \tau^{-1-\alpha}(L_\tau^0 v^{n+1} - L_\tau^1 v^n)$, $\alpha > 0$. Пусть

$$|w_\tau^n|_{p,m} \leqslant c_m'|v^n|_{p,m+s} \tag{11}$$

(таким свойством обладают, например, решения дифференциальных уравнений, аппроксимируемых однородной схемой (4)). Функция $v - u_\tau$ удовлетворяет схеме (4) с $f_\tau = \tau^\alpha w_\tau$ и начальной функцией $\varphi - \varphi_\tau$.

Пусть M_ε — оператор осреднения радиуса ε (см. [1, 2]). Предположим, что $\sup\limits_{t,\tau}|v(t)|_{p,0} < \infty$, но $\sup\limits_{t,\tau}|v(t)|_{p,m} = \infty$, $m > 0$.

Теорема 3. *Пусть разностная схема удовлетворяет условию* (10), *функция v удовлетворяет условию* (11) *и, кроме того,*

$$\sup_{t,\tau}|M_\varepsilon v - v|_{p,0} < a|\varepsilon|^\beta, \quad \beta > 0.$$

Тогда при $\varphi_\tau = \varphi$ существует сглаживание, при котором

$$\sup_{t,\tau}|M_\varepsilon u_\tau - v|_{p,0} < c\tau^{\alpha\beta/(\beta+l+s)}. \tag{12}$$

Это сглаживание определяется следующим выбором радиуса сглаживания:

$$\varepsilon = c'\tau^{\alpha/(\beta+l+s)}.$$

Оценка (12) определяет точность, которую можно достичь, применяя разностные аппроксимации, неустойчивые в обычных нормах, но удовлетворяющие условию слабой устойчивости.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Кузнецов, ДАН, **200**, № 5 (1971). [2] Н. Н. Кузнецов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **11**, № 6 (1971). [3] Л. С. Франк, ДАН, **189**, № 3 (1969). [4] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 2, пространства основных и обобщенных функций, М., 1958.