

П. А. КУЧМЕНТ

ОБ ИНДЕКСЕ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В СЕМЕЙСТВЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 28 X 1971)

В работах ⁽⁴⁾ и ⁽¹⁾ было введено и исследовано понятие индекса компактного семейства фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве; аналогичная теория в банаховом пространстве была построена в ⁽⁶⁻⁸⁾.

В настоящей работе изучается понятие индекса компактного семейства фредгольмовых операторов в семействе банаховых пространств.

Пусть $\mathcal{A}$ — отделимое линейное топологическое пространство. Будем рассматривать семейство банаховых пространств $X_1, \dots, X_n$, каждое из которых непрерывно вложено в $\mathcal{A}$. Обычным образом определяются пересечение X_0 и сумма X пространств $X_1, \dots, X_n$:

$$X_0 = \{x \in X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n\}, \quad \|x\|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \|x\|_i,$$

$$X = \left\{ x \in \mathcal{A} \mid x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in X_i \right\},$$

$$\|x\| = \inf_{\substack{x = \sum x_i \\ x_i \in X_i}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i \right).$$

В дальнейшем будем рассматривать только такие семейства банаховых пространств, у которых замыкание пространства X_0 в X_i имеет в X_i конечную коразмерность для всех $1 \leq i \leq n$.

Введем некоторые обозначения. $\mathfrak{B}$ — множество всех линейных ограниченных операторов в X , переводящих каждое из пространств X_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, в себя. Топология на $\mathfrak{B}$ задается с помощью нормы $\|T\|_{\mathfrak{B}} = \max_{0 \leq i \leq n} \|T\|_{X_i \rightarrow X_i}$. Φ — подмножество $\mathfrak{B}$, состоящее из операторов,

фредгольмовых в каждом из X_i , $i = 0, 1, \dots, n$. $\mathfrak{F}$ — подмножество из Φ , состоящее из всех операторов, имеющих одинаковый индекс в пространствах X_i , $i = 0, 1, \dots, n$ (см. ⁽²⁾). $\mathfrak{GL}$ — подмножество $\mathfrak{F}$, состоящее из всех операторов, обратимых в каждом из X_i , $i = 0, 1, \dots, n$. $\mathfrak{K}_0$ — двусторонний идеал в алгебре $\mathfrak{B}$, состоящий из всех операторов, являющихся конечномерными в X_i , $i = 0, 1, \dots, n$. $\mathfrak{K}$ — замыкание $\mathfrak{K}_0$ в $\mathfrak{B}$. Через π будет обозначаться каноническое отображение $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}$. Через $\mathcal{G}(\mathfrak{B}/\mathfrak{K})$ — группа обратимых элементов фактор-алгебры $\mathfrak{B}/\mathfrak{K}$. Для произвольного банахова пространства E через $\mathfrak{B}(E)$ будет обозначаться банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов в E , а через $\mathfrak{F}(E)$ — множество фредгольмовых операторов.

Для произвольного $T \in \mathfrak{F}(E)$ через $\kappa_E(E)$ обозначается индекс оператора T : $\kappa_E(T) = \dim N(T) - \text{codim } R(T)$. В дальнейшем вместо κ_{X_i} будем писать κ_i .

Пусть T — непрерывное отображение компакта $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{F}(E)$. Согласно ^(1, 4), индекс $\text{index}_E(T)$ определяется как элемент группы $K(\mathcal{U})$. Вместо

index_{x_i} будем писать index_i . Через $[\mathfrak{U}, \mathfrak{D}]$, как обычно, будем обозначать множество классов гомотопных отображений из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — некоторое топологическое пространство.

Естественным образом структурой группы снабжается $[\mathfrak{U}, \mathfrak{H}\mathfrak{E}]$ и полугруппы $[\mathfrak{U}, \Phi]$, $[\mathfrak{U}, \mathfrak{F}]$ и $[\mathfrak{U}, \mathfrak{F}(E)]$. Имеет место

Теорема 1. *Оператор $T \in \mathfrak{B}$ принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\pi T \in \mathfrak{G}(\mathfrak{B}/\mathfrak{R})$.*

Отсюда следует, что $[\mathfrak{U}, \mathfrak{F}]$ есть группа для любого дискретного множества $\mathfrak{U}$. Но несложно установить, что справедлива более сильная

Теорема 2. *Для любого топологического пространства $\mathfrak{U}$ полугруппа $[\mathfrak{U}, \mathfrak{F}]$ является группой.*

Теорема 3. *Последовательность полугрупп*

$$[\mathfrak{U}, \mathfrak{H}\mathfrak{E}] \xrightarrow{i} [\mathfrak{U}, \Phi] \xrightarrow{j} \underbrace{K(\mathfrak{U}) \oplus \dots \oplus K(\mathfrak{U})}_{n+1}$$

точна для любого компакта $\mathfrak{U}$. (Здесь i — отображение, индуцированное вложением $\mathfrak{H}\mathfrak{E} \subset \Phi$, а j — определяется по формуле $j = \text{index}_0 \oplus \dots \oplus \text{index}_n$).

Из доказательства теоремы 3 можно сделать ряд дополнительных выводов

(I) Если $\mathfrak{U}$ — связный компакт, то можно определить отображение $\kappa: [\mathfrak{U}, \Phi] \rightarrow \mathbf{Z}$ (см. (2)). В этом случае можно положить $j = \text{index}_0 \oplus \dots \oplus \kappa_1 \oplus \dots \oplus \kappa_n$ и теорема останется верной с заменой $K(\mathfrak{U})^{n+1}$ на $K(\mathfrak{U}) \oplus \mathbf{Z}^n$.

(II) Если $T: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ — непрерывное отображение, то можно доказать равенства $\text{index}_0 T = \text{index}_i T$, $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что теорема остается верной при замене Φ на $\mathfrak{F}$, j — на index_0 и $K(\mathfrak{U})^{n+1}$ — на $K(\mathfrak{U})$.

Заметим, что отображение j не может действовать на всю группу $K(\mathfrak{U})^{n+1}$ или $K(\mathfrak{U}) \oplus \mathbf{Z}^n$. Это следует из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть $B_1 \subset B_2$ — банаховы пространства такие, что вложение непрерывно и замыкание B_1 имеет в B_2 конечную коразмерность. Пусть T — оператор, являющийся в B_1 и B_2 фредгольмовым.*

Тогда $\kappa_{B_1}(T) \leq \kappa_{B_2}(T)$.

Для дальнейшего нам потребуется одно

Определение. Пусть E и F — банаховы пространства. Будем говорить, что пространство E обладает свойством $\mathfrak{A}(F)$, если существует семейство ограниченных проекторов P_i , $i = 1, 2, \dots$, в E , обладающих следующими свойствами:

а) если $P_i x = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots$, то $x = 0$;

б) $P_i P_j = 0$, если $i \neq j$;

в) образ $\text{Im } P_i$ изоморфен F для всех $i = 1, 2, \dots$; изоморфизмы устанавливаются отображениями $\tau_k: \text{Im } P_k \xrightarrow{\sim} F$;

г) существует и непрерывен оператор L_i левого сдвига, т. е. такой, что $\tau_k P_k L_i x = \tau_{k+1} P_{k+1} x$, $k = 1, 2, \dots$; то же самое относительно правого сдвига L_r ;

д) пусть $A: F \rightarrow F$ — непрерывный линейный оператор, тогда существуют и непрерывны в E порожденные им диагональные операторы $\Delta_p(A)$, $p = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие равенствам

$$P_k \Delta_p(A) x = \begin{cases} \tau_k^{-1} A \tau_k P_k x, & \text{если } k \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } k \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

(При перечисленных условиях можно показать, что отображения $\Delta_p(A): \mathfrak{B}(F) \rightarrow \mathfrak{B}(E)$ непрерывны);

е) замкнутая линейная оболочка образов $\{\text{Im } P_i\}$ совпадает с E . В случае $E = F$ получаем, что $\mathfrak{A}(E)$ есть свойство бесконечной делимости пространства E . Им обладают многие банаховы пространства, напри-

мер $l_p L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, гильбертовы пространства, симметрические пространства измеримых функций (см. ⁽⁵⁾).

Свойством $\mathfrak{A}(R^n)$ для любого натурального n обладают, например, пространства с симметричным базисом, т. е. с таким базисом $\{e_i\}$, что

$$а) \text{ если } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in E \text{ и } |\beta_i| \leq |\alpha_i| \quad \forall i, \text{ то } \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \in E,$$

$$\left\| \sum \beta_i e_i \right\| \leq \left\| \sum \alpha_i e_i \right\|;$$

б) $\left\| \sum \alpha_i e_{\tau(i)} \right\| = \left\| \sum \alpha_i e_i \right\|$, где $\tau(i)$ — любое взаимно однозначное преобразование множества индексов (см. ⁽⁸⁾ и ⁽⁹⁾).

Пусть теперь кроме семейства $X_i \subset \mathcal{A}$, $i = 0, 1, \dots, n$, имеется семейство $F_i \subset \mathcal{A}_1$, $i = 0, 1, \dots, n$, где $\mathcal{A}_1$ — отделимое линейное топологическое пространство и $F_0 = \bigcap_{i=1}^n F_i$. Пусть в пространстве X имеется ограниченный

проектор Q , действующий в каждом из пространств X_i , $i = 0, 1, \dots, n$, и такой, что $Q(X) \subset \bar{X}_0$, где $\bar{X}_0$ — замыкание X_0 в X . Пусть на $Q(X)$ определены проекторы P_j , $j = 1, 2, \dots$, действующие в каждом из пространств $Q(X_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, а на $P_j Q(X)$ — операторы τ_k : $P_j Q(X) \rightarrow \mathcal{A}_1$. Если набор операторов $\{P_j, \tau_j\}$ осуществляет на каждом из пространств $Q(X_i)$ свойство $\mathfrak{A}(F_i)$, мы будем говорить, что семейство $\{X_i\}$ обладает свойством $\mathfrak{A}\{F_i\}$.

Теорема 5. Если семейство $\{X_i\}$ обладает свойством $\mathfrak{A}\{F_i\}$ для некоторого семейства $\{F_i\}$, то последовательность групп

$$[\mathfrak{U}, \mathfrak{GL}] \xrightarrow{i} [\mathfrak{U}, \mathfrak{F}] \xrightarrow{\text{index}_0} K(\mathfrak{U}) \rightarrow 0$$

точна для любого компакта $\mathfrak{U}$. Если, кроме того, X_0 плотно в X , то точна для любого компакта $\mathfrak{U}$ последовательность

$$0 \rightarrow [\mathfrak{U}, \mathfrak{DL}] \xrightarrow{i} [\mathfrak{U}, \mathfrak{B}] \xrightarrow{\text{index}_0} K(\mathfrak{U}) \rightarrow 0. \quad (*)$$

Теорема 6. Пусть $n = 2$, $X_3 \subset \mathcal{A}$ — пространство, интерполяционное между X_1 и X_2 . Пусть также $T: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ — непрерывное отображение (компактность $\mathfrak{U}$ не требуется).

Тогда T есть непрерывное отображение из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}(X_3)$. Если отображения $T, T': \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ гомотопны, то они гомотопны и как отображения в $\mathfrak{F}(X_3)$. Если $\mathfrak{U}$ — компакт, то $\text{index}_3 T = \text{index}_0 T$.

Замечания. I) Если семейство состоит из одного пространства (т. е. $X_0 = T_1 = X$), то точная последовательность $(*)$ совпадает с последовательностью, выписанной Г. Нойбауэром ⁽⁸⁾ для частного случая, когда у пространства E существует дополняемое подпространство с симметричным базисом.

II) В работе ⁽³⁾ показано существование сингулярного интегрального оператора, являющегося фредгольмовым в $L_{p_1}(\Gamma)$ и $L_{p_2}(\Gamma)$, но не являющегося таковым в $L_{p_3}(\Gamma)$, где $1 < p_2 < p_3 < p_2 < \infty$ и Γ — некоторая замкнутая кривая на плоскости. Это показывает невозможность замены в теореме 6 множества $\mathfrak{F}$ на Φ .

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну за обсуждение работы.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
17 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Атья, Лекции по К-теории, М., 1967. ² И. П. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 12, № 2, 43 (1957). ³ I. Ts. Gokhberg, N. J. Krupnik, Studia Math., 31, 348 (1968). ⁴ K. Janich, Math. Ann., 161, 129 (1965). ⁵ Б. С. Митягин, УМН, 25, № 5, 63 (1970). ⁶ G. Neubauer, Math. Ann., 160, 93 (1965). ⁷ G. Neubauer, Math. Ann., 162, 92 (1965). ⁸ G. Neubauer, Math. Ann., 176, 273 (1968). ⁹ J. Singer, Rev. Math. Pures Appl., 6, 159 (1961).