Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 517.535.6 МАТЕМАТИКА

Н. Н. МЕЙМАН

К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 26 X 1971)

1°. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция с ограниченной характеристикой в p-связной области G с границей ∂G положительной емкости. В настоящей работе оценивается сверху и снизу $|f(z)|$ через характеристику $T(f, z_0)$. Так как в нулях и полюсах $|f(z)|$ соответственно обращается в нуль и бесконечность, то при этих оценках исключаются некоторые окрестности множества нулей $\{a_\nu\}$ и множества полюсов $\{b_\nu\}$. Эти исключительные окрестности точно определяются.

Из этих оценок, которые будут ниже выведены, в свою очередь, получаются теоремы единственности для $f(z)$.

Обозначения. $g(z; z_0; G)$ — функция Грина области G с полюсом в точке z_0; G_ρ — область, определяемая неравенством $g(z; z_0; G) > \rho$; $\omega(z; \alpha, G_\rho)$ — значение гармонической меры множества $\alpha \subset \partial G_\rho$ относительно области G_ρ в точке z; $P_{z_0}(z; \zeta; G)$ — ядро Пуассона области G (см. [1]),

$$P_{z_0}(z; \zeta; G) = \lim \frac{\omega(z; \widehat{\zeta\zeta_1}; G)}{\omega(z_0; \widehat{\zeta\zeta_1}; G)} \quad \text{при } \omega(z; \widehat{\zeta\zeta_1}; G) \to 0. \tag{1}$$

2°. В области G_ρ

$$\ln|f(z)| = \int_{\partial G_\rho} \ln|f(\zeta)|\,\omega(z; d\zeta; G_\rho) - \sum g(a_\nu; z; G_\rho) + \sum g(b_\nu; z; G_\rho). \tag{2}$$

При такой записи всегда предполагается, что суммирование происходит по a_ν и $b_\nu \in G_\rho$. Характеристическую функцию $T_\rho(f; z_0)$ определим симметричным образом $(f(z_0) \neq 0, \infty)$:

$$T_\rho(f; z_0) = \int_{\partial G_\rho} \ln^+|f(\zeta)|\,\omega(z_0; d\zeta; G_\rho) + \sum g(b_\nu; z_0; G_\rho) + \ln^-|f(z_0)|. \tag{3}$$

Из (2) следует, что

$$T_\rho(f; z_0) = T_\rho(1/f; z_0) = \\ = \int_{\partial G_\rho} \ln^-|f(z_0)|\,\omega(z_0; d\zeta; G_\rho) + \sum g(a_\nu; z_0; G_\rho) + \ln^+|f(z_0)|. \tag{4}$$

При уменьшении ρ $T(f; z_0)$ и обе суммы из (3) и (4) не убывают.

В этой работе в основном рассматриваются функции с ограниченной характеристикой, для которых $T_\rho(f; z_0) < M(f; z_0) < +\infty$, где M — константа. При $\rho \to 0$

$$\begin{gathered} T_\rho(f; z_0) \to T_0(f; z_0), \quad \sum g(a_\nu; z_0; G_\rho) \to \sum g(a_\nu; z_0; G) < +\infty, \\ \sum g(b_\nu; z_0; G_\rho) \to \sum g(b_\nu; z_0; G) < +\infty. \end{gathered} \tag{5}$$

Из тождеств

$$\sum g(a_\nu; z_0; G_\rho) = \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu; z_0; G) - \rho n_\rho,$$

$$\sum g(b_\nu;\, z_0; G_\rho) = \sum_{b_\nu \in G_\rho} g(b_\nu;\, z_0;\, G) - \rho P_\rho,$$

где n_ρ и P_ρ — соответственно число нулей и полюсов функции $f(z)$ в области G_ρ, следует

$$\lim \rho n_\rho = 0, \quad \lim \rho P_\rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{6}$$

3°. В области G имеет место модифицированная теорема Фату о представимости гармонической функции интегралом Пуассона — Стильтьеса (см. ([1])) и из равномерной ограниченности интегралов от $\ln^+|f(\zeta)|$ и $\ln^-|f(\zeta)|$ вдоль ∂G следует представление

$$\ln|f(z)| + \sum g(a_\nu;\, z;\, G) - \sum g(b_\nu;\, z;\, G) = \int\limits_{\partial G} P_{z_0}(z;\, \zeta;\, G)\, dq\, [\omega(z_0;\, \widehat{\zeta_0\zeta};\, G)], \tag{7}$$

где $q[\omega]$ — функция ограниченной вариации от гармонической меры $\omega(z_0;\, \widehat{\zeta_0\zeta};\, G)$ (см. ([1])). Если представить $q[\omega]$ в виде разности позитивной и негативной вариации $q[\omega] = q^+[\omega] - q^-[\omega]$, то

$$\begin{aligned} T_0(f;\, z_0) &= \int\limits_{\partial G} dq^+ + \sum g(b_\nu;\, z_0;\, G) + \ln^-|f(z_0)|,\\ T_0(1/f;\, z_0) &= \int\limits_{\partial G} dq^- + \sum g(a_\nu;\, z_0;\, g) + \ln^+|f(z_0)|. \end{aligned} \tag{8}$$

Для круга $|z| < 1$ и $z_0 = 0$ $P_0(z;\, e^{i\theta})$ — обычное ядро Пуассона и $q[\omega] = q(\theta)$.

Лемма. *Ядро Пуассона удовлетворяет неравенству*

$$P_{z_0}(z;\, \zeta,\, G) \leqslant \frac{1 + \exp[-g(z;\, z_0;\, G)]}{1 - \exp[-g(z;\, z_0;\, G)]} = \exp[2\chi(z;\, z_0;\, G)], \tag{9}$$

где $\chi(z;\, z_0;\, G)$ — неэвклидово расстояние между точками z_0 и z (см ([2])).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в области G функция, H и δ — числа из интервалов $0 < H < 1/2$, $0 < \delta < 1$ и $\rho = (1-\delta)\, g(z';\, z_0;\, G)$; $z';\, z_0 \in G$. Для каждого ρ существуют две такие системы неэвклидовых дисков $C_{\nu,\rho}\{z\colon \chi_\rho(z;\, \alpha_\nu;\, \rho) < \chi_{\nu,\rho}\}$ и $C'_{\nu,\rho}\{z\colon \chi_\rho'(z;\, \beta_{\nu,\rho}) < \chi'_{\nu,\rho}\}$, содержащих соответственно нули и полюса функции $f(z)$ в области $G_\rho\{z\colon g(z;\, z_0;\, G) > \rho\}$, с общей суммой неэвклидовых радиусов*

$$\sum \chi_{\nu,\rho},\ \sum \chi'_{\nu,\rho} < \frac{1}{2} \ln \frac{1+2H}{1-2H}, \tag{10}$$

что $|f(z')|$ при $z' \in G_\rho \setminus \bigcup C_{\nu,\rho}$ удовлетворяет оценке снизу, а при $z' \in G_\rho \setminus G'_{\nu,\rho}$ — оценке сверху. Вдоль любой кривой, лежащей в G_ρ, замыкание которой пересекается с ∂G_ρ, неэвклидова линейная мера точек, не принадлежащих ни $\bigcup C_{\nu,\rho}$, ни $\bigcup C'_{\nu,\rho}$, равна ∞.

1) *Если $z' \in G_\rho \setminus \bigcup C_{\nu,\rho}$ и $f(z)$ не равна тождественно нулю, то*

$$\ln|f(z')| > -\frac{1+\exp(-\delta g(z';\, z_0;\, G)}{1-\exp(-\delta g(z';\, z_0;\, G)} \Big[(1-\theta_{0,\rho})\, T_\rho(f,\, z_0) + \\ + \frac{\delta}{2(1-\delta)} \sum [g(a_\nu;\, z_0;\, G) - g(a_\nu;\, z_0;\, G_\rho)] \ln \frac{e}{H}\Big], \tag{11}$$

где суммирование происходит по $a_\nu \in G_\rho$ и

$$0 \leqslant \theta_{0,\rho} = \left[\sum g(a_\nu;\, z_0;\, G_\rho) + \ln^+|f(z_0)|\,/\, T_\rho(f;\, z_0) \leqslant 1.\right. \tag{12}$$

Если $f(z)$ — функция ограниченного вида и $\varepsilon > 0$, то при $g(z';\, z_0;\, G) < \eta(\varepsilon;\, f)$, $\delta = 1 - \varepsilon'$, $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon;\, f)$ и $z' \in G_\rho \setminus \bigcup C_{\nu,\rho}$

$$g(z';\, z_0' G) \ln|f(z')| > -2(1 - \theta_0 + \varepsilon)\, T_0(f;\, z_0), \tag{13}$$

где $\theta_0 = \underline{\lim}\, \theta_{0,\rho}$ при $\rho \to 0$.

2) *Если* $z' \in G_\rho \setminus \bigcup C'_{\nu,\rho}$ *и* $f(z)$ *не равна тождественно* ∞, *то*

$$\ln|f(z')| < \frac{1+\exp(-\delta g(z';\, z_0;\, G)}{1-\exp(-\delta g(z';\, z;\, G)}\Big[(1-\theta_{\infty,\rho})\, T_\rho(f;\, z_0) + \\ + \frac{\delta}{2(1-\delta)}\sum (g(b_\nu;\, z_0;\, G) - g(b_\nu;\, z_0;\, G_\rho))\ln\frac{e}{H}\Big], \tag{14}$$

где суммирование происходит по $b_\nu \in G_\rho$ *и*

$$0 \leqslant \theta_{\infty,\rho} = \Big[\sum g(b_\nu;\, z_0;\, G_\rho) + \ln^-|f(z_0)|\Big]\Big/ T_\rho(f;\, z_0) \leqslant 1. \tag{15}$$

Если функция $f(z)$ *ограниченного вида и* $\varepsilon_1 > 0$, $g(z';\, z_0;\, G) < \eta_1(\varepsilon_1;\, f)$, $\delta = 1-\varepsilon_1'$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_1'(\varepsilon_1;\, f)$ *и* $z' \in G_\rho \setminus \bigcup C'_{\nu,\rho}$, *то*

$$g(z';\, z_0;\, G)\ln|f(z')| < 2(1-\theta_\infty+\varepsilon_1)T_0(f;\, z_0), \tag{16}$$

где $\theta_\infty = \overline{\lim}\,\theta_{\infty,\rho}$ *при* $\rho \to 0$.

3) *Если* $f(z)$ *имеет конечное число нулей (полюсов), то, начиная с некоторого* ρ, $\bigcup C_{\nu,\rho}$ $(\bigcup C'_{\nu,\rho})$, *монотонно сжимаясь, стремится к* $\bigcup C_{\nu,0}$ $(\bigcup C'_{\nu,\rho})$ *при* $\rho \to 0$. *Если число нулей (полюсов) бесконечно, то* $\sum \chi_{\nu,\rho}$ $(\sum \chi'_{\nu,\rho})$, *где суммирование происходит по всем дискам, пересекающимся с фиксированной замкнутой подобластью, стремится к* 0 *при* $\rho \to 0$.

Доказательство опирается на результаты работы (2).

1) Из (2) следует неравенство

$$\ln|f(z')| > -\int\limits_{\partial G_\rho} P_{z_0}(z;\, \zeta;\, G_\rho)\ln^-|f(\zeta)|\,\omega(z_0;\, d\zeta;\, G_\rho) - \sum g(a_\nu;\, z';\, G_\rho).$$

Интеграл оценивается из (4) и (9), а второй член, согласно (2),

$$\sum g(z';\, a_\nu;\, G_\rho) < n_\rho(1-\ln H),$$

$$\rho n_\rho = \sum [g(z_0;\, a_\nu,\, G) - g(z_0;\, a_\nu;\, G_\rho)], \quad a_\nu \in G_\rho.$$

Если воспользоваться неравенством $[1+\exp(-\delta g)]/[1-\exp(-\delta g)] > > 2/(\delta g)$, то получим (11). Если $f(z)$ — функция ограниченного вида, то второй член справа стремится к нулю при $\rho \to 0$.

Положим $\tau_\rho = \sum [(g(a_\nu;\, z_0;\, G) - g(a_\nu;\, z_0;\, G_\rho)]\cdot\ln\frac{e}{H}\Big/ T_\rho$. Если $(1-\theta_{0,\rho}+\tau_\rho/(2\varepsilon'))(1+\varepsilon') < 1-\theta_{0,\rho}+\varepsilon$, то (13) заведомо справедливо. Оптимальный выбор $\varepsilon' = [\tau_\rho/(1+\theta_{0,\rho})]^{1/2}$, $\tau_\rho < \varepsilon^2/(2(1-\theta_0))$. Последнее неравенство определяет такое $\eta(\varepsilon;\, f)$, что при $g(z';\, z_0;\, G) < \eta$ оно выполняется. Если $\theta_0 = 1$, то $\varepsilon' = 1/2$ и $\tau < 2\varepsilon$.

П.2) получается заменой f на $1/f$; п.3) следует из (2).

Известная теорема Шагиняна (3, 4) для регулярной и ограниченной в круге $|z| < 1$ функции получается в несколько более точной формулировке, если ослабить неравенство (13), заменив его правую часть произвольной функцией $P(|z'|)$, стремящейся к $-\infty$ при $|z'| \to 1$.

Примечание. Для многосвязной области исключительные диски C_ν и C_ν' определяются как квази-неэвклидовы (2).

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = \exp(-i/z)$ в $G\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Легко убедиться, что $T_\rho(f,\, i) \equiv 1$, $\theta_{0,\rho} \equiv 0$, $\theta_{\infty,\rho} \equiv 1$, $g(y;\, i;\, \operatorname{Im} z > 0) = = 2y + O(y^2)$ при $y \to 0$, $\ln|f(iy)| = -1/y$ и неравенство (13) сводится к неравенству $-[2y+O(y^2)]\cdot\frac{1}{y} > -2(1+\varepsilon)$, а неравенство (16) сводится к неравенству $-(2y+O(y^2)]\cdot\frac{1}{y} < 2\varepsilon_1$.

Для $f(z) = \exp(i/z)$ неравенства (13) и (16) сведутся к неравенствам $[2y+O(y^2)]\cdot\frac{1}{y} > -2\varepsilon$ и $[2y+O(y^2)]\cdot\frac{1}{y} < 2(1+\varepsilon_1)$.

Пример показывает, что теорема точная: для функций $f(z)$ с заданной характеристикой T_0 коэффициенты в неравенствах (13) и (16) не могут быть уменьшены.

4°. Из (13) следует, что если $g(z_n; z_0; G) \to 0$ *и* $\{z_n\}$ содержит такую подпоследовательность $\{z_{n'}\}$, что $z_{n'} \in G_{\rho'} \setminus \bigcup C_{\nu,\rho}$, $\rho' = \varepsilon' g(z_{n'}; z_0; G)$, то $\underline{\lim}\, g(z_n; z_0; G) \ln |f(z_0)| \geqslant -2(1 - \theta_0 + \varepsilon) T_0(f; z_0)$. Отсюда следует, что каждому критерию существования указанной подпоследовательности $\{z_{n'}\}$ соответствует теорема единственности. Аналогичная ситуация для последовательности $\{z_{n''}\}$ вне $\bigcup C'_{\nu,\rho'}$. В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема единственности. *Пусть последовательность* $\{z_n\}$ *такова, что для некоторого* $\sigma > 0$ *существует такое число* m, *что любой неэвклидов диск радиуса* $\chi \leqslant \sigma$ *содержит не более* m *точек* $\{z_n\}$ *и* $\sum g(z_n; z_0; G) = \infty$. *Если при этих условиях*

$$\underline{\lim}\, g(z_n; z_0; G) \ln |f(z_0)| < -2(1 - \theta_0 + \varepsilon) T_0(f; z_0),$$

то $f(z) \equiv 0$, *а если*

$$\overline{\lim}\, g(z_n; z_0; G) \ln |f(z_0)| > 2(1 - \theta_0 + \varepsilon) T_0(f; z_0),$$

то $f(z) \equiv \infty$.

Примечание при корректуре. Для многосвязной области в лемме и теоремах гриновские функции и неэвклидовы расстояния нужно заменить квазигриновскими функциями и квазинеэвклидовыми расстояниями и дисками (см. [2]).

Институт теоретической и экспериментальной физики
Москва

Поступило
15 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Мейман, ДАН, 197, № 6 (1971). [2] Н. Н. Мейман, ДАН, **202**, № 6 (1972). [3] А. Л. Шагинян, Докл. АН АрмССР, **27**, № 5 (1968). [4] А. Л. Шагинян, Изв. АН АрмССР, **12**, № 1 (1959).