Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

А. В. МИРОНОВ, академик АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ

К ПОНЯТИЮ НОРМЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $R^\Delta = \prod_{q\in\Delta} R_q^1$ — прямое произведение Δ экземпляров действительных прямых R^1 в тихоновской топологии. R^Δ называют тихоновским полуполем ([6]). В нем операции сложения и умножения определяются равенствами

$$(x+y)(q) = x(q) + y(q), \quad (x\cdot y)(q) = (x(q))\cdot(y(q)),$$
$$(\lambda\cdot x)(q) = \lambda\cdot x(q),$$

где $q\in\Delta$, $\lambda\in R^1$, а отношение частичного порядка определяется конусом $R_+{}^\Delta = \{x\colon x(q)\geqslant 0,\ q\in\Delta\}$. Элемент $q\in\Delta$ отождествим с действительной функцией, определенной на Δ и принимающей значение 1 на $q\in\Delta$ и 0 на $\Delta\setminus\{q\}$.

Пусть E — вещественное (или комплексное) векторное пространство.

Определение 1. Пространство E назовем **нормируемым над полуполем** R^Δ, если задано отображение $\|\ldots\|\colon E\to R_+{}^\Delta$, называемое нормой над R^Δ, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам нормы):

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|\lambda\cdot x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$, λ — скаляр;
3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Норма естественным образом порождает в E отделимую локально выпуклую топологию, база окрестностей начала которой определяется всеми окрестностями вида

$$V_U = \{x\colon \|x\|\in U\}, \tag{1}$$

где

$$U = \{x\colon |x|\cdot q_i \leqslant \varepsilon\cdot q_i, \quad \varepsilon > 0, \quad q_i\in\Delta, \quad i = 1,\ldots,n\} \tag{2}$$

— окрестность нуля в полуполе R^Δ.

Пространство E, нормированное над R^Δ, будем обозначать (E, R^Δ), или просто E (если это не вызовет путаницы). Как известно, класс отделимых локально выпуклых пространств совпадает с классом векторных пространств, нормированных над R^Δ ([4]).

Определение 2. Пусть (E, R^Δ), $(F, R^{\Delta'})$ — два нормируемых пространства и $A\colon E\to F$ — линейный оператор. Под **нормой** оператора A ([7]) будем понимать отображение

$$\|A\|\colon R_+^\Delta \to R_+^{\Delta'},$$

определяемое равенством

$$\|A\|(a) = \sup_{\|x\|\leqslant a} \|Ax\|, \quad a\in R_+{}^\Delta. \tag{3}$$

В дальнейшем $\|A\|$ удобно рассматривать как элемент полуполя

$$R^* = \prod_{a\in R_+^\Delta} R_a^{\Delta'} = R^{\Delta^*}, \text{ где } R_a^{\Delta'} = R^{\Delta'},\ \Delta^* = \prod_{a\in R_a^\Delta} \Delta_a', \quad \Delta_a' = \Delta,$$

причем Δ^* — диадическая алгебра Буля ([5]).

Пусть E и F — обычные нормированные пространства над прямой R^1 и линейный оператор A имеет обычную норму, которую обозначим через $|A|$. Тогда из (3) имеем $|A| = \|A\|(1)$ и $\|A\|(a) = |A|\cdot a$, $a \in R_+^1$. Таким образом, с нашей точки зрения, $\|A\|$ есть линейное отображение $R_+^1 \to R_+^1$, а обычная норма $|A|$ — угловой коэффициент этого отображения.

Примеры. 1. Пусть C^∞ — множество всех вещественных (или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на действительной прямой R^1. Тогда C^∞ можно рассматривать как пространство, нормируемое над полуполем $s \times s$, где s — пространство всех последовательностей действительных чисел, рассматриваемое как полуполе $s = \prod_{i=1}^{\infty} R_i^1$, $R_i^1 = R^1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Для этого норму элемента $x \in C^\infty$ над $s \times s$ мы определим равенством

$$\|x\| = (x_{nm}) \in s \times s, \quad x_{nm} = \sup_{-m \leqslant t \leqslant m} |x^{(n)}(t)|.$$

Пусть $A = d/dt$ — оператор дифференцирования в C^∞, тогда $\|d/dt\|(a) \leqslant b$, где $a = (a_{nm}) \in s_+ \times s_+$ и $b = (b_{nm})$, $b_{nm} = a_{n+1,\, m+1}$, $n, m = 1, 2, 3, \ldots$

2. Пусть $\{E_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, — семейство нормируемых (в обычном смысле) пространств и A_{ij}: $E_j \to E_i$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$, — семейство ограниченных линейных операторов. Обозначим через $|A_{ij}|$ обычную норму оператора A_{ij}. Предположим, что бесконечная матрица операторов $(A) = (A_{ij})$ с конечными строками ([3]). Тогда бесконечная числовая матрица $(|A|) = (|A_{ij}|)$ тоже с конечными строками. Пусть $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ и $\|x\| = (\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in E$, $x_n \in E_n$, $\|x_n\|$ — норма x_n в E_n. Определим оператор A: $E \to E$, полагая $y = Ax$, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, $y_n \in E_n$ и $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} x_j$. Тогда легко показать, что

$$\|A\|(a) = (|A|) * a, \tag{4}$$

где $*$ означает умножение бесконечной матрицы $(|A|)$ на матрицу-столбец $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор A: $E \to F$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы существовала $\|A\|$ и отображение $\|A\|$: $R_+^\Delta \to R_+^\Delta$ было непрерывным в нуле.*

Доказательство. Пусть A — непрерывный оператор. Тогда $A(B_a)$, где $B_a = \{x\colon \|x\| \leqslant a,\ x \in E\}$ будет ограниченным множеством в E при каждом $a \in R_+^\Delta$. Отсюда $\|A(B_a)\|$ будет ограниченным множеством в $R^{\Delta'}$. Но в $R^{\Delta'}$ всякое ограниченное множество будет ограниченным в смысле порядка ([8]), следовательно, для каждого $a \in R_+^\Delta$ будет существовать $\|A\|(a) = \sup \|A(B_a)\|$. Покажем теперь, что $\|A\|$ непрерывна в нуле. Заметим, что $\|A\|(0) = 0$. Далее, отображение f: $E \to R_+^{\Delta'}$, определяемое равенством $f(x) = \|Ax\|$, $x \in E$, непрерывно, как суперпозиция непрерывных отображений A: $E \to F$ и нормы в F. Следовательно, для окрестности нуля $U' = \{\xi\colon\ |\xi|\cdot q_i' \leqslant \varepsilon\cdot q_i',\ \varepsilon > 0,\ q_i' \in \Delta,\ i = 1, \ldots, n',\ \xi \in R\Delta'\}$ в полуполе $R^{\Delta'}$ найдется окрестность нуля U в полуполе R^Δ, определяемая равенством (2), такая, что $\|A(V_U)\| \subset U'$, где V_U — окрестность нуля в E, определяемая равенством (1). Покажем, что $\|A\|(U \cap R_+^\Delta) \subset U'$. Пусть $a \in U \cap R_+^\Delta$ и рассмотрим $\|A\|(a)$. Из определения U и V_U ясно, что $B_a \subset V_U$ и потому $\|A(B_a)\| \subset U'$, отсюда

$$\|A\|(a) = \sup_{\|x\| \leqslant a} \|Ax\| = \sup \|A(B_a)\| \subset U';$$

следовательно, включение $\|A\|(U \cap R_+^\Delta) \subset U'$, а с ним и непрерывность $\|A\|$ в нуле доказаны.

Обратно, пусть $\|A\|$ существует и, как отображение $R_+^\Delta \to R_+^{\Delta'}$, непрерывно в нуле. Тогда непрерывность оператора A в нуле (и следовательно, на всем пространстве E) вытекает из очевидного неравенства $\|Ax\| \leqslant \|A\|(\|x\|)$.

Определение 3. Будем говорить, что пространство (E, R^Δ) обладает d-свойством, если каждый элемент $x \in E$, удовлетворяющий условию $\|x\| \leqslant a_1 + a_2$, $a_1, a_2 \in R_+^\Delta$, можно разложить в сумму $x = x_1 + x_2$ так, что $\|x_i\| \leqslant a_i$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Если пространство E обладает d-свойством и $\|A\|$ непрерывна в нуле, то она непрерывна и на всем R_+^Δ.*

Заметим, что норма оператора дифференцирования d/dt в пространстве C^∞ имеет разрыв при $a = 1$, следовательно, пространство C^∞ не обладает d-свойством. Вообще эта ситуация характерна для операторов в счетно-нормируемых пространствах.

Отметим следующие свойства нормы оператора:

1) $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;

2) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, λ — скаляр;

3) $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$.

Обозначим через $L(E, F)$ векторное пространство всех непрерывных линейных операторов A: $E \to F$. Если $E = F$, то вместо $L(E, E)$ будем писать $L(E)$. Из свойств 1 — 3 следует, что относительно введенной нормы оператора $L(E, F)$ есть пространство, нормированное над полуполем R^*.

Теорема 3. *Топология нормированного пространства $(L(E, F), R^*)$ есть топология ограниченной сходимости* [1].

В дальнейшем $L(E, F)$ будем рассматривать в топологии, порождаемой нормой оператора над полуполем R^*. Отметим еще следующие свойства нормы оператора.

4) $\|A\|$ изотонна, т. е. если $a_1, a_2 \in R_+^\Delta$ и $a_1 \leqslant a_2$, то $\|A\|(a_1) \leqslant \|A\|(a_2)$;

5) пусть (E_1, R^{Δ_1}), (E_2, R^{Δ_2}) и (E_3, R^{Δ_3}) — нормированные над полуполями векторные пространства A_1: $E_1 \to E_2$, A_2: $E_2 \to E_3$ — непрерывные линейные операторы; тогда

$$\|A_2 \circ A_1\| \lesssim \|A_2\| \circ \|A_1\|.$$

Теорема 4. *Пусть $L(E)$ секвенциально полно. Если оператор $A \in L(E)$ удовлетворяет условию*

$$\|A\|(a) \leqslant \varphi(a) \cdot \psi(a), \tag{5}$$

где $a \in R_+^\Delta$, φ — изотонная неотрицательная действительная функция, заданная на R_+^Δ и ψ: $R_+^\Delta \to R_+^\Delta$, причем $\psi_n(a) \leqslant m(a)$, $\psi_n = \underbrace{\psi \circ \psi \circ \ldots \circ \psi}_{n \text{ раз}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то при $|\lambda| < \dfrac{1}{\sup\limits_{a \in R_+^\Delta} \varphi(m(a))}$ оператор $I - \lambda A$ обратим и имеет место равенство

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n,$$

где I — единичный оператор.

Доказательство. Положим $S_k = I + \sum\limits_{n=1}^{k} \lambda^n A^n$, тогда

$$\|S_{k+p} - S_k\| \leqslant \| \sum_{n=k+1}^{k+p} \lambda^n A^n \| \leqslant \sum_{n=k}^{k+p} |\lambda|^n \cdot \|A^n\|.$$

Оценим $\|A^n\|$. Имеем, согласно свойству 5,

$$\|A^2\|(a) \leqslant \|A\|(\|A\|(a)) \leqslant \|A\|(\varphi(a)\cdot\psi(a)) = \varphi(a)\cdot\|A\|(\psi(a)) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(a)\cdot\varphi(\psi(a))\cdot\psi(\psi(a)) \leqslant \varphi(a)\cdot\varphi(m(a))\cdot\psi_2(a).$$

Вообще нетрудно показать, что

$$\|A^n\|(a) \leqslant \varphi(a)\cdot\varphi^{n-1}(m(a))\cdot\psi_n(a),$$

отсюда

$$\|S_{k+p} - S_k\|(a) \leqslant \frac{\varphi(a)}{\varphi(m(a))}\cdot m(a)\cdot \sum_{n=k+1}^{k+p} |\lambda|^n\cdot\varphi^n(m(a)).$$

Так как $q = |\lambda|\cdot\varphi(m(a)) < 1$, $a \in R_+^\Delta$, то $\{S_k\}$ фундаментальна в $L(E)$. В силу секвенциальной полноты $L(E)$ существует

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S, \quad S \in L(E).$$

Дальнейшее доказательство того, что $S = (I - \lambda A)^{-1}$, аналогично классическому случаю, т. е. случаю, когда E — банахово пространство ([2]).

Следствие. *Спектр оператора $A - \lambda I$ лежит в круге радиуса* $\rho = \sup\limits_{a\in R_+^\Delta} \varphi(m(a))$.

Отметим частные случаи теоремы 4.

1. $\varphi(a) = r = \mathrm{const}$, $\psi(a) = a$. В этом случае $\rho = r$. Если E — банахово пространство, то $\rho = r = |A|$ ([2]).

2. Пусть оператор A переводит некоторую окрестность нуля пространства E в ограниченное множество (в частности, этим свойством обладает непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве, а также компактный оператор в локально выпуклом пространстве). Тогда найдутся элементы $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \Delta$ и элемент $m \in R_+^\Delta$ такие, что

$$\|A\|(a) \leqslant \max(a_{q_1}, a_{q_2}, \ldots, a_{q_n})\cdot m, \tag{6}$$

где $a \in R_+^\Delta$, $a_{q_i} = a\cdot q_i$ (здесь мы отождествляем идеал $q\cdot R^\Delta$, $q \in \Delta$, с действительной прямой). Заметим, что условие (6) достаточно, чтобы оператор A переводил некоторую окрестность нуля пространства E в ограниченное множество. Неравенство (6) можно записать в виде (5), полагая $\varphi(a) = \max(a_{q_1}, a_{q_2}, \ldots, a_{q_n})$, $\psi(a) = m = \mathrm{const}$. При этом $\rho = \max(m_{q_1}, m_{q_2}, \ldots, m_{q_n})$.

Этот случай с иной точки зрения рассмотрен в ([9]).

3. Пусть E — пространство примера 2, где все E_i — банаховы пространства и оператор A задается бесконечной нижней треугольной матрицей (A) ([2]), в которой $\sum\limits_{j=1}^{i} |A_{ij}| \leqslant r$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда $L(E)$ — полное пространство ([1]), оператор A непрерывен (следствие равенства (4) и теоремы 1) и имеет место неравенство (5), если положить $\varphi(a) = r = \mathrm{const}$, $\psi(a) = (a_1, \max(a_1, a_2), \ldots, \max(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots) \in S$. Здесь $\rho = r$.

В случае, когда $E_i = R^1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, мы получаем известную теорему об обратимости бесконечных матриц ([3]).

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 6 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., 1959. [2] В. И. Соболев, Лекции по дополнительным главам математического анализа, М., 1968, стр. 240. [3] Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960, стр. 42. [4] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Топологические полуполя, Ташкент, 1960. [5] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. [6] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, УМН, 21, в. 4 (130), 185 (1966). [7] Т. А. Сарымсаков, ДАН, 159, № 1 (1964). [8] Т. А. Сарымсаков, Тр. Ташкентск. гос. унив., в. 189, 275 (1961). [9] H. Schaefer, Math. Ann., 138, 275 (1959).