Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 5

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

И. А. ВОЛЫНЕЦ

ИСКАЖЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 XII 1971)

В настоящей заметке выводятся оценки для изменения площади при q-квазиконформных отображениях прямоугольников и круга вида $\Delta\sigma \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon$, где $\Delta\sigma$ — изменение площади, $\varepsilon = (q-1)/(q+1)$ достаточно мало. Оценки вида $\Delta\sigma \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon^{1/2}$ были получены П. П. Белинским ([1]). Мы не будем останавливаться на оценках ([2–4]), отметим лишь, что из оценки ([4]) следует существование константы M такой, что $\Delta\sigma \leqslant M\varepsilon$. В этой же оценке содержится еще зависимость изменения площади от величины площади. Нас будет интересовать только константа M.

1. q-Квазиконформные отображения прямоугольников единичной площади. Пусть, как в ([1]), прямоугольник K: $0 < x < \lambda$, $0 < y < 1/\lambda$ отображается на прямоугольник $0 < u < \mu$, $0 < v < 1/\mu$, $x+iy = z$, $u+iv = w$. Так же получим неравенство

$$\left|\frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}\right| \leqslant \iint\limits_K \left[\sqrt{p(x, y)} - \frac{1}{\sqrt{p(x, y)}}\right] \sqrt{J(x, y)}\,dx\,dy,$$

где $p(x, y)$ — характеристика отображения, а $J(x, y)$ — якобиан. Применяя это неравенство к отображениям

$$\frac{t^2+1}{2t}\,w(z) + \frac{t^2-1}{2t}\,\overline{w(z)}, \quad \frac{t^2+1}{2t}\,w(z) - \frac{t^2-1}{2t}\,\overline{w(z)},$$

где t — действительное число, получим

$$\left|\frac{t\mu}{\lambda} - \frac{\lambda}{t\mu}\right| \leqslant \iint\limits_K \left[\sqrt{p_1^t(x, y)} - \frac{1}{\sqrt{p_1^t(x, y)}}\right] \sqrt{J(x, y)}\,dx\,dy,$$
$$\left|\frac{t\lambda}{\mu} - \frac{\mu}{t\lambda}\right| \leqslant \iint\limits_K \left[\sqrt{p_2^t(x, y)} - \frac{1}{\sqrt{p_2^t(x, y)}}\right] \sqrt{J(x, y)}\,dx\,dy; \qquad (*)$$

$p_1^t(x, y)$ и $p_2^t(x, y)$ — характеристики соответствующих отображений. Сложив неравенства $(*)$, разделив на t, при $t \to \infty$ получим

$$2 \leqslant \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \leqslant 2\sqrt{\frac{q^2+1}{2q}} \iint\limits_K \sqrt{J(x, y)}\,dx\,dy. \qquad (**)$$

Преобразуя неравенство $(**)$, как в ([1]), получим

$$\Delta\sigma \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\sigma(1-\sigma)}\,(q-1) + o(q-1) \text{ или } \Delta\sigma \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(q-1) + o(q-1).$$

Учитывая, что всякое q-квазиконформное отображение можно представить в виде суперпозиции отображений с меньшим отклонением, можно утверждать, что $\Delta\sigma \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(q-1)$. Легко построить отображение единичного квадрата, для которого $\Delta\sigma = {}^1/_2(q-1) + o(q-1)$. Для этого надо левую половину подвергнуть растяжению, а правую — сжатию.

2. Квазиконформные отображения единичного круга. Пусть $w = f(z)$ — квазиконформное отображение круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ с нормировкой $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и комплексной характе-

ристикой $\varepsilon h(z)$, где $\|h(z)\|_{L_\infty}\leqslant 1$, ε — малое действительное число. Тогда

$$\left|\int\limits_{|z|=1} w\,\overline{dz}\right| = \left|\iint\limits_{|z|\leqslant 1} w_z\,dz\,\overline{dz}\right| \leqslant 2\iint\limits_{|z|\leqslant 1} |w_z|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\iint\limits_{|z|\leqslant 1}\sqrt{J(x,y)}\,dx\,dy, \tag{1}$$

$z=x+iy$, $J(x,y)$ — якобиан отображения. Применение формулы Стокса в данном случае законно.

Оценим снизу $\left|\int\limits_{|z|=1} w\,\overline{dz}\right|$. Для этого представим $w=f(z)$ в виде

$$w = z+\varepsilon f_1(z)+\varepsilon^2 f_2(z)+O(\varepsilon^3), \tag{2}$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — некоторые ограниченные функции, а остаточный член также имеет равномерную оценку. Этот факт является следствием того, что отображающую функцию можно представить в виде ряда, используя известные интегральные операторы. Свойства этих операторов позволяют заключить об ограниченности соответствующих функций (см. [5]).

Разложим $f_2(z)$ на две ортогональные составляющие по z и по iz:

$$f_2(z) = z\varphi_1(z)+iz\varphi_2(z). \tag{3}$$

Здесь $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — действительные функции. Учитывая, что $|w|=1$ при $|z|=1$, получим

$$\varphi_1(z) = -\tfrac{1}{2}|f_1(z)|^2. \tag{4}$$

Вид $f_1(z)$ нам известен (см. [6]); при $|z|=1$

$$f_1(z) = z\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\left[\frac{\varepsilon(1-z)\,h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)(z-\zeta)} - \frac{\varepsilon(1-\bar z)\,\overline{h(\zeta)}}{\bar\zeta(1-\bar\zeta)\overline{(z-\zeta)}}\right]\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}. \tag{5}$$

Из (2), (3), (4) получим

$$\left|\int\limits_{|z|=1} w\,\overline{dz}\right| = 2\pi+\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\left|\int\limits_{|z|=1} f_1(z)\,\overline{dz}\right|^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}|f_1(z)|^2\,d\varphi + O(\varepsilon^3), \tag{6}$$

здесь $z=e^{i\varphi}$. Подставив (5) в (6) и проинтегрируем по $d\varphi$ с учетом того, что интегралы по площади при $|z|=1$ являются непрерывными предельными значениями аналитических или антианалитических вне круга $|z|\leqslant 1$ функций:

$$\left|\int\limits_{|z|=1} w\,\overline{dz}\right| = 2\pi+\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}\left[\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{(1-z)\,h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)(z-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right]d\varphi\right|^2 -$$

$$-\varepsilon^2\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left|\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{(1-z)\,h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)(z-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right|^2 - \operatorname{Re}\left[\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{(1-z)\,h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)(z-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right]^2\right\}d\varphi + O(\varepsilon^3) =$$

$$= 2\pi+2\pi\varepsilon^2\left|\operatorname{Im}\left[\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right]\right|^2 - 2\pi\varepsilon^2\left\{\left|\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right|^2 +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\left|\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right|^2 - \operatorname{Re}\left[\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right]^2\right\} + O(\varepsilon^3) =$$

$$= 2\pi - 2\pi\varepsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}\left|\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right|^2 + O(\varepsilon^3). \tag{7}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{h(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\pi}\right|^2 \leqslant 4. \tag{8}$$

Обозначим $\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \frac{h(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta} \frac{d\sigma_\zeta}{\pi}$ через a_k. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \zeta^k h(\zeta)}{\zeta} \frac{d\sigma_\zeta}{\pi} \leqslant \iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \zeta^k\right|}{|\zeta|} \frac{d\sigma_\zeta}{\pi} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \zeta^k\right|^2}{|\zeta|} \frac{d\sigma_\zeta}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \frac{d\sigma_\zeta}{\pi|\zeta|}\right]^{1/2} = 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{2k+1}\right]^{1/2} \leqslant 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right]^{1/2}.$$

Это и дает требуемое неравенство.

Соединяя (1), (7), (8), следуя далее, как в ([1]), получим оценку для изменения площадки при квазиконформных, близких к тождественному, отображениях круга.

$$2\pi - 8\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \iint\limits_{|z|\leqslant 1} \sqrt{J(x, y)}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\sqrt{\iint\limits_{E_1} J(x, y)\, dx\, dy \cdot \iint\limits_{E_1} dx\, dy} + \sqrt{\iint\limits_{E_2} J(x, y)\, dx\, dy \cdot \iint\limits_{E_2} dx\, dy}\right];$$

E_1 и E_2 — дополнительные одно к другому измеримые подмножества единичного круга.

Обозначим меру E_1 через σ, а ее изменение — через $\Delta\sigma$, тогда

$$2\pi - 8\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\sqrt{\sigma(\sigma+\Delta\sigma)} + \sqrt{(\pi-\sigma)(\pi-\sigma-\Delta\sigma)}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\left(\sigma + \frac{\Delta\sigma}{2} - \frac{(\Delta\sigma)^2}{8\sigma} + \ldots\right) + \left(\pi - \sigma - \frac{\Delta\sigma}{2} - \frac{(\Delta\sigma)^2}{8(\pi-\sigma)} + \ldots\right)\right] -$$

$$- \frac{\pi\varepsilon^2}{2} - 4\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \leqslant - \frac{\pi(\Delta\sigma)^2}{8\sigma(\pi-\sigma)} + \ldots$$

Окончательно получаем оценки

$|\Delta\sigma| \leqslant 6\sqrt{\sigma(\pi-\sigma)}\,\varepsilon + o(\varepsilon)$ или $|\Delta\sigma| \leqslant {}^3/_2\pi(q-1) + o(q-1)$;
здесь $q = (1+\varepsilon) / (1-\varepsilon)$.

Представляя исходное отображение в виде суперпозиции отображений с меньшим отклонением, последовательно проводя оценки, учитывая равномерную оценку остаточного члена, получим в пределе $|\Delta\sigma| \leqslant {}^3/_2\pi(q-1)$.

Для отображения $w = z + 2\varepsilon(|z| - z^2) + o(\varepsilon)$ и множества $\{z\colon |w_z| \geqslant 1, |z| \leqslant 1\}$ имеем $\Delta\sigma = {}^{41}/_{12}\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Пусть $w = f(z)$ — q-квазиконформное отображение единичного круга, тождественное на границе и такое, что $f(0) = 0$. Тогда, видоизменяя соответствующим образом предыдущие оценки, получим

$$|\Delta\sigma| \leqslant {}^1/_2\pi(q-1) + o(q-1).$$

В этом случае экстремальным, по-видимому, является отображение $w = z|z|^{1/q-1}$, которое увеличивает площадь круга $|z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$ на величину $\frac{\pi}{e}(q-1) + o(q-1)$.

Новосибирский государственный университет

Поступило 5 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Белинский, ДАН, **121**, № 1, 16 (1958). [2] Б. В. Боярский, ДАН, **102**, № 4, 661 (1955). [3] O. Lehto, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Math., **378** (1965). [4] F. W. Gehring, E. Reich, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Math., **388** (1966). [5] L. Bers, On Moduli of Riemann Surfaces, Zurich, 1964. [6] П. П. Белинский, Сибирск. матем. журн., **1**, № 3, 303 (1960).