

С. Г. ГИНДИКИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 XII 1971)

В этой заметке рассматриваются квазиоднородные корректные по Петровскому дифференциальные операторы, символы которых имеют вещественные характеристические корни (в частности, гиперболические операторы). Для таких операторов с переменными коэффициентами методом энергетических оценок может быть исследована задача Коши; их можно рассматривать как обобщение гиперболических операторов. С последними их роднит также обратимость времени в задаче Коши. Однако в общем случае конечной области зависимости, разумеется, нет, и класс корректности устроен существенно иначе. Другая особенность заключается в том, что энергетические оценки получаются в пространствах с нормами, содержащими экспоненциальный вес не только по времени (как в гиперболическом случае), но и по пространственным переменным. Во всех результатах проявляется неравноправность пространственных направлений, заключающаяся в существовании конуса исключительных направлений. В гиперболическом случае этот конус совпадает со всем пространством и эффект неравноправности направлений отсутствует.

Обозначения. Пусть $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$; (τ, ξ) — набор двойственных переменных, $\tau = \sigma + i\rho$, $\xi = \xi + i\eta$. Полином $P(\tau, \xi)$ будем называть q -однородным, если он становится однородным после приписывания τ веса q . Аналогичную терминологию будем использовать для дифференциальных операторов $P(D_t, D_x)$. Если не оговорено противное, q предполагается нечетным.

2. Определение q -гиперболических полиномов (операторов). Пусть $P(\tau, \xi)$ — q -однородный, корректный по Петровскому полином степени k по τ . Это означает, что P разрешен относительно τ^k и для всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$ корни P относительно τ — $\chi_1(\xi), \dots, \chi_k(\xi)$ — вещественны (q нечетно!). Полином P называется q -гиперболическим, если

а) корни χ_j не кратны при $\xi \neq 0$, т. е. $\chi_j(\xi)$ можно рассматривать при $\xi \neq 0$ как аналитические функции на $\mathbb{R}^n$, причем $\chi_j(\xi) \neq \chi_l(\xi)$ при $j \neq l$, $\xi \neq 0$;

б) если $q > 1$, то существует такое направление $N \in \mathbb{R}^n$, что все производные $\chi_j(\xi)$ в направлении N — $\psi_1(\xi), \dots, \psi_k(\xi)$ — отличны от нуля при $\xi \neq 0$ и имеют одинаковый знак.

Заметим, что $\chi_j(\xi)$, $\psi_j(\xi)$ — однородные функции степеней q и $q-1$ соответственно; можно считать $\psi_j(\xi) > 0$.

Предложение 1. q -Однородный полином P q -гиперболичесок тогда и только тогда, когда существуют такие $N \in \mathbb{R}^n$, $c_1, c_2 > 0$, что

$$|P(\tau, \xi + i\nu N)| \geq c_1(|\tau| + |\xi|^q)^{k-1}(|\rho| + \nu|\xi|^{q-1}) \quad (1)$$

при $\nu > 0$, $\rho = \text{Im } \tau \leq -c_2\nu^q$; $\xi = \xi + i\nu N$, $|\xi|^2 = \sum |\xi_j|^2$.

Замечание. При $q = 1$ мы получаем строго гиперболические полиномы: в качестве N можно брать любой вектор $\mathbb{R}^n$, как следует из того,

что конус гиперболических направлений имеет полную размерность ⁽¹⁾. При четном q оценка (1) была бы равносильна параболичности по Петровскому.

Следствие 1. Существует такой конус $V \subset \mathbb{R}^n$, $N \in V$, полной размерности, что

$$|P(\tau, \xi)| \geq c_1(|\tau| + |\xi|^q)^{k-1}(|\rho| + |\eta| |\xi|^{q-1}) \quad (2)$$

при $\eta \in V$, $\rho \leq -c_2|\eta|^q$.

Обозначим через $V(P)$ объединение всех таких конусов. Можно показать, что $V(P)$ — выпуклый конус, состоящий из таких η , что полином $P_\eta(\tau, \xi) = P(\tau, \xi + i\eta)$ корректен по Петровскому; (2) имеет место для любого V , для которого $\bar{V} \subset V(P)$. Пусть $\lambda_P(\eta)$ — верхняя грань по тем ρ , для которых полином $P_\eta(\sigma - i\rho, \xi)$ имеет вещественные нули (σ, ξ) . Тогда $\lambda_P(\eta)$ — выпуклая книзу однородная степени q функция, для которой $V(P)$ является множеством, на котором она конечна. При $q = 1$ имеем $V(P) = \mathbb{R}^n$; при $q > 1$ конус $V(P)$ не содержит прямых.

Полином $P(\tau, \xi)$ (не являющийся q -однородным) называется q -гиперболическим, если этим свойством обладает его старшая q -однородная часть.

Следствие 2. Для q -гиперболических полиномов $P(\tau, \xi)$ оценки (1), (2) имеют место при $|\eta| \geq c_3$, $\rho \leq -c_2|\eta|^q - c_4$ для некоторых $c_3, c_4 > 0$.

3. Структура классов корректности. Пусть $q > 1$ и $1/q + 1/q' = 1$. Через $\mu_P(x)$ обозначим функцию, двойственную по Юнгу к $\lambda_P(\eta)$; $\mu_P(x)$ — однородная функция степени q' ; $\mu_P(x) = 0$ при $-x \in \bar{V}(P)^*$, где $V(P)^*$ — конус, сопряженный $V(P)$; если открытый конус V_1 содержит $-\bar{V}(P)^*$, то существует такое $c = c(V_1) > 0$, что $\mu_P(x) \geq c|x|^{q'}$ при $x \notin V_1$. Положим $e_P(x, t) = \exp(-\mu_P(x/t))$ при $t > 0$, $e_P(x, t) = 0$ при $t \leq 0$. Через S_P обозначим пространство функций $\phi(x, t)$, у которых все производные $\phi^{(z)}$ таковы, что $e_P(x, t)\phi^{(z)}$ убывает быстрее всех степеней; через $(S')_P$ — совокупность обобщенных функций, попадающих в S' после умножения на $e_P(x, t)$. В этих пространствах вводится естественная топология.

Предложение 2. Однородный q -гиперболический дифференциальный оператор $P(D_t, D_x)$ изоморфно действует на пространствах S_P и $(S')_P$.

Это один из вариантов утверждения о том, что класс корректности состоит из функций вместе с некоторым числом производных, оцениваемых через $|x|^b \cdot 1/e_P(x, a)$ для некоторых $a > 0$, $b > 0$. Функции из этого класса могут расти лишь степенным образом на $-\bar{V}(P)^*$ и как $\exp(c|x|^{q'})$ вне любого конуса V_1 указанного выше типа. Последнее свойство классов корректности можно получить из (2), где, однако, не исследуется характер перехода от экспоненциальной асимптотики к степенной, необходимый для явного описания классов корректности в многомерном случае. Предложение 2 доказывается при помощи техники трубчатых областей (3).

Переход к неоднородному случаю мало что меняет: надо лишь домножить $e_P(x, t)$ на $\exp(\rho t - (\eta, x))$, где (ρ, η) удовлетворяют условиям следствия 2.

4. q -Гиперболические операторы с переменными коэффициентами. q -Гиперболические полиномы удовлетворяют некоторому естественному обобщению условия сильной корректности (3, 4). Полином $P(\tau, \xi)$ назовем $\mathcal{T}$ -корректным, если для всякого $M > 0$ существуют такие $\eta(M) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(M) \in \mathbb{R}^1$, что $P(\sigma + i\rho, \xi + i\eta(M) + \eta) \neq 0$ при $|\eta| \leq M$, $\rho \leq \gamma(M)$. При $\eta(M) \equiv 0$ мы получим сильную корректность.

Мы будем рассматривать в этой статье лишь дифференциальные операторы с бесконечно дифференцируемыми стабилизирующимися коэффициентами. Пусть $P(y; \tau, \xi)$ — символ дифференциального оператора $P(y; D_t, D_x)$, $y = (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Предположим, что $P(y; \tau, \xi)$ при всех y являются $\mathcal{T}$ -корректными полиномами с общим набором $\eta(M)$, $\gamma(M)$ и имеют по-

стоянную силу $|P(y'; \sigma + i\gamma(M), \xi + i\eta(M)) / P(y''; \sigma + i\gamma(M), \xi + i\eta(M))| \leq c(y', y'') < \infty$ для любых $y', y'' \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда для $P(y; D_y)$ по схеме ⁽⁴⁾ может быть доказана однозначная разрешимость задачи Коши в некоторой шкале пространств с весом $\exp(\rho t - (\eta(M), x))$, где M и $\rho - \gamma(M)$ достаточно велики. Мы не будем приводить точной формулировки этого результата, так как в интересующем нас случае q -гиперболических операторов требование постоянства силы очень обременительно: оно равносильно постоянству коэффициентов в старшей q -однородной части.

5. Энергетические оценки для q -гиперболических операторов. Пусть символ дифференциального оператора $P(y; D_t, D_x)$ при всех y является q -гиперболическим полиномом фиксированной степени k по t и с общим направлением N . В этой ситуации будем говорить, что $P(y; D_y)$ — q -гиперболический дифференциальный оператор с переменными коэффициентами. Введем шкалу пространств $H_{[\gamma, \nu]}^{(s, l)}(\mathbb{R}^{n+1})$ (в обозначении опущены q и N), отвечающих следующим нормам:

$$(u, v)_{[\gamma, \nu]}^{(s, l)} = \int \tilde{u}(\sigma - i\gamma, \xi + i\nu N) \overline{\tilde{v}(\sigma - i\gamma, \xi + i\nu N)} (|\sigma - i\gamma| + |\xi + i\nu N|)^q)^{2s} \times \\ \times (\gamma + \nu |\xi + i\nu N|^{q-1})^{2l} d\sigma d\xi, \quad \gamma, \nu > 0, \quad (3) \\ \|u\|_{[\gamma, \nu]}^{(s, l)} = (u, u)_{[\gamma, \nu]}^{(s, l)}.$$

Теорема 1. Если $P(y; D_y)u = f$ — q -гиперболическое дифференциальное уравнение, то для некоторых $M_1, M_2, a > 0$ оно однозначно разрешимо при $f \in H_{[\gamma, \nu]}^{(s, 0)}$, $\nu \geq M_1$, $\gamma \geq a\nu^q + M_2$, причем

$$\|f\|_{[\gamma, \nu]}^{(s, 0)} \geq c \|u\|_{[\gamma, \nu]}^{(s+k-1, 1/2)}. \quad (4)$$

Оценка (4) является следствием адекватной энергетической оценки, которая получается из (4) заменой левой части на $\{-\operatorname{Im}(P(y; D_y), P_\tau(y; D_y))_{[\gamma, \nu]}^{(s, 0)}\}^{1/2}$, где $P_\tau(y; D_y)$ — оператор с символом $\frac{\partial}{\partial \tau} P(y; \tau, \xi)$.

Можно показать также, что в случае переменных коэффициентов сохраняется класс корректности, построенный выше для постоянных коэффициентов.

6. Операторы с доминирующей главной частью. Гиперболические и параболические по Петровскому полиномы включаются в класс доминантно корректных полиномов ⁽⁵⁾. Добавление q -гиперболических полиномов приводит к естественному расширению этого класса, которое мы сейчас опишем.

Будем понимать здесь под многоугольником неограниченный выпуклый многоугольник Γ , содержащий вместе с каждой точкой (α, β) всякую точку (α', β') , $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$. Рассмотрим полином $P(\tau, \xi) = \sum a_{\alpha\delta} \tau^\alpha \xi^\delta \dots \xi_n^{\delta_n}$, разрешенный относительно старшей степени τ . Пусть Γ_P — наименьший многоугольник рассматриваемого типа, содержащий точки (α, β) , $\beta = |\delta| = \sum \delta_j$, отвечающие $a_{\alpha\delta} \neq 0$. Через U_P обозначим многоугольник, натянутый на целочисленные точки Γ_P , не принадлежащие сторонам Γ_P , отличным от вертикальных ($\beta = \text{const}$). Пусть $\Delta_\Gamma(\tau, \xi) = \sum |\tau|^\alpha |\xi|^\beta$, где суммирование ведется по вершинам многоугольника Γ .

Полином P назовем D -корректным, если существует $N \in \mathbb{R}^n$, для которого при любых $c, \nu > 0$ существуют такие $M(c), \gamma(c, \nu)$, что при $(\alpha, \beta) \in U_P$, $\nu \geq M(c)$, $\rho \leq \gamma(c, \nu)$, $\xi = \xi + i\nu N$

$$c|\tau|^\alpha |\xi|^\beta \leq |P(\tau, \xi)|.$$

Можно показать, что $\gamma(c, \nu)$ всегда можно выбрать имеющим вид $a\nu^\alpha + b(c)$.

На $\mathcal{D}$ -корректные полиномы переносится теорема об алгебраической структуре доминантно корректных полиномов ⁽⁵⁾. Прежде всего понятие q -гиперболичности очевидно переносится на псевдополиномы — q -однородные функции, являющиеся полиномами по τ , коэффициенты которых являются вещественно аналитическими функциями от ξ . Аналогично определяются $2b$ -параболические псевдополиномы с аналитическими коэффициентами. Будем называть q -гиперболический псевдополином невырожденным, если $\chi_j(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0, 1 \leq j \leq k$.

Предложение 3. $\mathcal{D}$ -корректный полином $P(\tau, \xi)$ с точностью до младших членов однозначно представляется в виде произведения q -однородных псевдополиномов

$$\tau^a P_{q_1}(\tau, \xi) \dots P_{q_l}(\tau, \xi), \quad q_1 > q_2 > \dots > q_l, \quad (5)$$

где P_{q_j} являются q_j -параболическими при четных q_j и q_j -гиперболическими при нечетных q_j , невырожденными при $q_j > 1$, если $a = 0$, и при всех q_j , если $a > 0$.

Равенство с точностью до младших членов означает, что разность между P и (5) оценивается по модулю через $\sum |\tau|^{\alpha} |\xi|^{\beta}$, где сумма берется по вершинам U_P . Величины q_j в (5) имеют простой геометрический смысл: $(q_j, 1)$ — направляющие векторы сторон Γ_P .

Описание классов корректности для $\mathcal{D}$ -корректных полиномов сводится к описанию классов корректности для сомножителей в (5); мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Переходя к переменным коэффициентам, заметим, что $\mathcal{D}$ -корректные полиномы являются $\mathcal{T}$ -корректными, но и здесь требование постоянства силы очень обременительно, в то время как техника энергетических оценок использует лишь естественные ограничения. Для многоугольника Γ определим эрмитову форму

$$(u, v)_{[\rho, \nu]}^{\Gamma} = \int \tilde{u}(\tau, \zeta) \overline{\tilde{v}(\tau, \zeta)} (\Delta_{\Gamma}(\tau, \zeta))^2 d\sigma d\xi, \quad \tau = \sigma + i\rho, \quad \zeta = \xi + i\nu N,$$

и пространство $H_{[\rho, \nu]}^{\Gamma}$ с нормой $\|u\|_{[\rho, \nu]}^{\Gamma} = \{(u, u)_{[\rho, \nu]}^{\Gamma}\}^{1/2}$.

Теорема 2. Пусть $P(y; \tau, \xi)$ при всех y является $\mathcal{D}$ -корректным полиномом с независимым от y направлением N и многоугольником U_P .

Тогда уравнение $P(y; D_y)u = f$ однозначно разрешимо при $f \in H_{[\rho, \nu]}^{\Gamma}$ для всех Γ так, что для некоторых M и $\gamma(\nu)$

$$f|_{[\rho, \nu]}^{\Gamma} \geq \{-\operatorname{Im}(P(y; D_y)u, Q(y; D_y)u)_{[\rho, \nu]}^{\Gamma}\}^{1/2} \geq c \|H(D_y)u\|_{[\rho, \nu]}^{\Gamma} \geq c\nu \|u\|_{[\rho, \nu]}^{\Gamma+Q}$$

при $\nu > M$, $\rho < \gamma(M)$, где $Q(y; \tau, \xi) = P_{\tau}(y; \tau, \xi)$; $\overline{H(D_y)u}(\tau, \xi) = \overline{H(\tau, \xi) \tilde{u}(\tau, \xi)}$, $H(\tau, \xi) = (-\operatorname{Im} P(0; \tau, \xi) \overline{Q(0; \tau, \xi)})^{1/2}$.

Проведенные в статье рассуждения допускают различные обобщения: в определении q -гиперболичности можно приписывать различным переменным $\xi_1, \dots, \xi_n$ различные веса; в определении $\mathcal{D}$ -корректных полиномов можно заменить многоугольники многогранниками; можно рассмотреть полиномы, в некотором смысле q -гиперболические по одним и $2b$ -параболические по другим переменным (обобщение плюрипараболичности из ⁽⁶⁾), и т. д. При этом рассуждения усложняются в алгебраической части, почти не меняясь в аналитической.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. ² М. В. Федорюк, Матем. сборн., **62** (104), 397 (1963). ³ С. Г. Гиндикин, УМН, **23**, в. 3 (141), 177 (1968). ⁴ Л. Г. Волевиц, С. Г. Гиндикин, Функциональный анализ, **1**, в. 4, 8 (1967). ⁵ Л. Р. Волевиц, С. Г. Гиндикин, Функциональный анализ, **2**, в. 3, 22 (1968). ⁶ С. Г. Гиндикин, ДАН, **173**, № 3 (1967).