

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ, В. Я. ТУРЧЕНКО

О ВОЛНЕ РАЗГРУЗКИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 10 XII 1971)

Рассматривается задача о распространении волны разгрузки в цилиндрическом (призматическом) полубесконечном упруго-пластическом стержне ⁽¹⁾. Проводится исследование асимптотического поведения решения при больших значениях времени и на больших расстояниях от конца стержня.

Пусть h — координата Лагранжа, t — время, u — скорость, σ — напряжение (техническое), ε — деформация, ρ_0 — начальная плотность материала стержня.

Зависимость $\sigma(\varepsilon)$, согласно которой осуществляется нагрузка, линейная в интервале $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s$, $\varepsilon_s > 0$, и нелинейная при $\varepsilon > \varepsilon_s$. При $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s$ имеем $\sigma'(\varepsilon) = E$ ($E = \text{const}$ — модуль упругости), при $\varepsilon > \varepsilon_s$ функция $\sigma(\varepsilon)$, по предположению, обладает свойствами $0 < \sigma'(\varepsilon) < E$, $-\infty < \sigma''(\varepsilon) < 0$. Первая производная $\sigma'(\varepsilon)$ — непрерывная функция ε , вторая производная $\sigma''(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = \varepsilon_s$ претерпевает разрыв ($\sigma''(\varepsilon_s - 0) = 0$, $\sigma''(\varepsilon_s + 0) = -K$, $K > 0$).

Разгрузка каждого элемента стержня происходит по линейному закону $\sigma - \sigma_* = E(\varepsilon - \varepsilon_*)$, где $\sigma_* = \sigma_*(h)$, $\varepsilon_* = \varepsilon_*(h)$ — максимальные напряжение и деформация.

Нормальное напряжение на конце стержня $h = 0$ изменяется по известному закону $\sigma = p(t)$. Функция $p(t)$ монотонно растет в интервале $0 \leq t \leq \tau$, $\tau > 0$, от нуля до своего максимального значения $\sigma_m > \sigma_s$, $\sigma_s = E\varepsilon_s$, а затем монотонно убывает, причем либо стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, либо становится равной нулю при некотором конечном значении аргумента, после чего $p(t) \equiv 0$. Нормальное напряжение на конце стержня может увеличиться от нуля до максимального значения $\sigma_m > \sigma_s$ и мгновенно ($\tau = 0$).

В плоскости ht имеем область покоя, область нагрузки и область разгрузки. Границей между областью покоя и областью нагрузки является прямая $h = g_0 t$, $g_0 = \sqrt{E/\rho_0}$, границей между областью нагрузки и областью разгрузки служит выходящая из точки с координатами $h = 0$, $t = \tau$ линия разгрузки $h = \varphi(t)$.

Решением в области нагрузки является простая волна

$$h = g[t - F(\sigma)], \quad u = - \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\rho_0 g}, \quad g = \sqrt{\frac{\sigma'(\varepsilon)}{\rho_0}}, \quad (1)$$

где $F(\sigma)$ — функция, обратная в интервале $0 \leq \sigma \leq \sigma_m$ для функции $p(t)$, $0 \leq t \leq \tau$. Если $\tau = 0$, то $F \equiv 0$.

В области разгрузки имеем

$$-u = f_1(\alpha) + f_2(\beta), \quad \sigma / (\rho_0 g_0) = f_1(\alpha) - f_2(\beta), \quad (2)$$

где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$ — функции характеристических переменных,

$$\alpha = g_0 t - h, \quad \beta = g_0 t + h. \quad (3)$$

Значения α , g и других величин на линии разгрузки, как функции t будем обозначать $\alpha^*(t)$, $g^*(t)$ и т. д., или просто α^* , g^* , ...

Известные ⁽²⁾ неравенства $\varphi'(t) \geq g^*(t)$, $\varphi'(t) \leq g_0$ позволяют сделать вывод, что $\varphi(t)$, $\beta^*(t)$ и $\alpha^*(t)$ — монотонно возрастающие функции, причем $\varphi(t)$ и $\beta^*(t)$ — строго монотонно возрастающие функции. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(t) \rightarrow \infty$, $\beta^*(t) \rightarrow \infty$.

Нетрудно убедиться, что $\sigma^*(t) > \sigma_s$ для любого t из интервала $\tau \leq t < \infty$. Неравенство $\sigma^*(\tau) > \sigma_s$ следует непосредственно из самой постановки задачи. Если предположить, что $\sigma^*(t_1) \leq \sigma_s$ при каком-либо $t_1 > \tau$, то при $\tau > 0$ получим $\alpha^*(t_1) = g_0 F[\sigma^*(t_1)] < g_0 \tau$, что противоречит выводу о монотонно возрастающем характере функции $\alpha^*(t)$, поскольку $\alpha^*(\tau) = g_0 \tau$. При $\tau = 0$ устанавливаем вначале, пользуясь свойством монотонности функции $\alpha^*(t)$ и очевидным равенством $(d\alpha^*/dt)_{t=0} = g_0 - g(\sigma_m)$, что $\alpha^*(t) > 0$ при $t > 0$. Затем к доказательству привлекаем соотношение $g_0 - g^* = \alpha^*/t$.

В области нагрузки при $0 < t < \infty$, $h < g_0 t$ функция $u(h, t)$ принимает отрицательные значения. Покажем, что и в области разгрузки ($\tau \leq t < \infty$, $0 \leq h \leq \varphi(t)$) выполняется неравенство $u(h, t) < 0$.

Из условия непрерывности на линии разгрузки напряжения и скорости получаем

$$f_2(\beta^*) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \left(\int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \frac{g_0}{g} d\sigma - \sigma^* + \sigma_s \right). \quad (4)$$

Так как при $\tau \leq t < \infty$ имеем $\sigma^*(t) > \sigma_s$, а при $\sigma > \sigma_s$ имеем $g < g_0$, то из (4) получаем $f_2(\beta^*) > 0$, $g_0 \tau \leq \beta^* < \infty$. Следовательно, $f_2(\beta) > 0$ при $g_0 \tau \leq \beta < \infty$.

Запишем условие на конце стержня:

$$p(t) / (\rho_0 g_0) = f_1(g_0 t) - f_2(g_0 t), \quad t \geq \tau. \quad (5)$$

Поскольку $f_2(g_0 t) > 0$ и $p(t) \geq 0$, то $f_1(g_0 t) > 0$, $\tau \leq t < \infty$. Следовательно, $f_1(\alpha) > 0$ при $g_0 \tau \leq \alpha < \infty$. Пользуясь затем первой из формул (2), убеждаемся, что знак скорости каждой частицы при разгрузке — отрицательный.

В соответствии с уравнением количества движения имеем

$$-\rho_0 \int_{\varphi(t)}^{g_0 t} u dh - \rho_0 \int_0^{\varphi(t)} u dh = \int_0^t p(t) dt, \quad t \geq \tau. \quad (6)$$

В результате преобразования первого члена левой части этого равенства при помощи формул (1) и интегрирования по частям получаем

$$-\varphi(t) \int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \frac{\sigma}{g^2} \frac{dg}{d\sigma} d\sigma - \rho_0 \int_0^{\varphi(t)} u dh = \int_{F(\sigma^*)}^t p(t) dt, \quad t \geq \tau. \quad (7)$$

Учитывая знак функции $u(h, t)$, приходим к неравенству

$$-\frac{\varphi(t)}{t} \int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \frac{\sigma}{g^2} \frac{dg}{d\sigma} d\sigma < \frac{1}{t} \int_{F(\sigma^*)}^t p(t) dt, \quad t > \tau. \quad (8)$$

Правая часть в полученном неравенстве является при $t \rightarrow \infty$ исчезающе малой величиной. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю и левая часть, что возможно только в случае, если $\sigma^* \rightarrow \sigma_s$. При $t \rightarrow \infty$ имеем $\sigma^*(t) \rightarrow \sigma_s$, $\varepsilon^*(t) \rightarrow \varepsilon_s$ и $g^*(t) \rightarrow g_0$.

Пользуясь формулами (4) и (5), устанавливаем далее, что $f_2(\beta) \rightarrow 0$, когда $\beta \rightarrow \infty$, и $f_1(\alpha) \rightarrow 0$, когда $\alpha \rightarrow \infty$. Согласно второй из формул (2) при $t \rightarrow \infty$ будем иметь $f_1(\alpha^*) \rightarrow \sigma_s / (\rho_0 g_0)$.

Функция $\alpha^*(t)$, будучи монотонной, при $t \rightarrow \infty$ обязательно стремится либо к конечному, либо к бесконечному пределу. Так как при $\alpha \rightarrow \infty$ имеем $f_1(\alpha) \rightarrow 0$ и при $t \rightarrow \infty$ имеем $f_1(\alpha^*) \rightarrow \sigma_s / (\rho_0 g_0)$, то без труда приходим к заключению, что $\alpha^*(t)$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к отличному от нуля конечному пределу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^*(t) = b, \quad 0 < b < \infty. \quad (9)$$

Этот результат представляет необходимое и достаточное условие того, что линия разгрузки имеет наклонную асимптоту $h = g_0 t - b$. Другим путем наклонная асимптота линии разгрузки была обнаружена ранее А. М. Скобеевым⁽³⁾. Уравнение линии разгрузки при больших t можно записать, таким образом, в виде

$$h = g_0 t - b + o(1). \quad (10)$$

Согласно (9) и (1), имеем при $t \rightarrow \infty$

$$g_0 - g^* = B/t + o(1/t), \quad B = b - g_0 F(\sigma_s). \quad (11)$$

Если $\tau = 0$, то $B = b$.

Рассмотрим функцию $g = g(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_s$ и обратную ей функцию $\sigma = \sigma(g)$. Имеют место представления

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= g_0 - A^{-1}(\sigma - \sigma_s) + o(\sigma - \sigma_s), \quad \sigma \rightarrow \sigma_s; \\ \sigma(g) &= \sigma_s + A(g_0 - g) + o(g_0 - g), \quad g \rightarrow g_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$A = 2E\sqrt{\rho_0 E}/K. \quad (13)$$

Применяя вторую из формул (12) и формулы (11) и (10), получаем следующее асимптотическое выражение для функции $\sigma_*(h)$:

$$\sigma_*(h) \sim \sigma_s + \frac{2BE^2}{K} \frac{1}{h}, \quad h \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Для определения асимптотического закона распределения остаточных деформаций имеем очевидную формулу

$$\varepsilon^0 = \frac{K}{2E^3} (\sigma_* - \sigma_s)^2 + o((\sigma_* - \sigma_s)^2), \quad h \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где ε^0 — остаточная деформация.

На основании (15) и (14) устанавливаем

$$\varepsilon^0(h) \sim \frac{2B^2 E}{K} \frac{1}{h^2}, \quad h \rightarrow \infty. \quad (16)$$

По формуле (4) при помощи (12) получаем

$$f_2(\beta^*) = \frac{A}{4E} (g_0 - g^*)^2 + o((g_0 - g^*)^2), \quad t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Пользуясь этим результатом, формулой (11) и асимптотическим равенством $\beta^* \sim 2g_0 t$, $t \rightarrow \infty$, приходим к следующему асимптотическому представлению функции $f_2(\beta)$:

$$f_2(\beta) \sim \frac{AB^2}{\rho_0} \frac{1}{\beta^2}, \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Предположим, что при $t \rightarrow \infty$ имеет место оценка $p(t) = o(t^{-2})$. Скорость конца стержня, согласно первой из формул (2) и формулам (5) и (18), в этом случае будет изменяться по асимптотическому закону

$$u(0, t) \sim -\frac{4B^2 \sqrt{\rho_0 E}}{K} \frac{1}{t^2}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Ясно, что по такому закону изменяется скорость любого фиксированного поперечного сечения стержня.

Нетрудно получить также следующие асимптотические формулы, справедливые при любом фиксированном значении $h \geq 0$ и $t \rightarrow \infty$: если $t^{-2} = o(p(t))$, то

$$u(h, t) \sim -\frac{1}{\sqrt{\rho_0 E}} p\left(t - \frac{h}{g_0}\right) - \frac{4B^2 \sqrt{\rho_0 E}}{K} \frac{1}{t^2}, \quad (20)$$

если $p(t) \sim C_1 t^{-2}$ (C_1 — постоянная), то

$$u(h, t) \sim \frac{C_2}{t^2}, \quad C_2 = -\frac{C_1}{\sqrt{\rho_0 E}} - \frac{4B^2 \sqrt{\rho_0 E}}{K}. \quad (21)$$

Обратимся к равенству (7). В результате преобразования второго члена левой части этого равенства при помощи первой из формул (2) и формулы (5) будем иметь

$$-\varphi(t) \int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \frac{\sigma}{g^2} \frac{dg}{d\sigma} d\sigma + \int_{\alpha^*}^{\beta^*} f_2(\beta) d\beta = \int_{F(\sigma^*)}^{\alpha^*/g_0} p(t) dt, \quad t \geq \tau. \quad (22)$$

Осуществляя в записанном равенстве предельный переход при $t \rightarrow \infty$ и учитывая затем знак функции $f_2(\beta)$, получаем полезное для оценки величины B неравенство

$$B < \frac{g_0}{\sigma_s} \int_{F(\sigma_s)}^{b/g_0} p(t) dt. \quad (23)$$

Пусть концу стержня сообщается продольный растягивающий удар со скоростью $u_0 < -g_0 \epsilon_s$ жестким телом массы M . Импульс приложенной к концу стержня силы за бесконечное время будет конечным и равным Mu_0 . Предположим, что функция $t^2 p(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет предел (конечный или бесконечный). Привлекая уравнение движения жесткого тела, приходим к выводу, что скорость конца стержня может изменяться только по асимптотическому закону (19). Предположив, кроме того, существование при $t \rightarrow \infty$ предела функции $t^3 p(t)$, устанавливаем, что напряжение на конце стержня убывает по асимптотическому закону

$$p(t) \sim \frac{8MB^2 \sqrt{\rho_0 E}}{\Omega K} \frac{1}{t^3}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где Ω — площадь поперечного сечения стержня.

В задаче об ударе по концу стержня жестким телом имеем $\tau = 0$, поэтому $B = b$. Для величины b в этом случае получаем на основании (23) оценку

$$b < -\frac{Mu_0}{\Omega \sigma_s} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (25)$$

Поступило
9 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Х. А. Рахматуллин, Ю. А. Демьянов, Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961. ² E. H. Lee, Quart. Appl. Math., 10, № 4, 335 (1953). ³ А. М. Скобеев, Прикладн. матем. и мех., 26, в. 6, 1059 (1962).