

Член-корреспондент АН СССР Ю. Л. ЕРШОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ

1. Основные определения, связанные с конструктивными моделями, можно найти в работах ^(1, 3). Ряд работ был посвящен изучению конкретных конструктивных алгебр (полей, абелевых групп) ^(3-5, 7, 8). Из общих теорем существования конструктивных моделей можно указать теорему о существовании конструктивных моделей для разрешимых теорий, открытую независимо Воотом ⁽⁹⁾ и Кобхамом ⁽⁶⁾. Эта теорема была уточнена и расширена автором ^(1, 2). Там же был предложен метод продолжения конструктивизаций с модели на некоторые расширения, использующий понятие относительной модельной полноты. Однако все эти методы ограничены возможностью применения только к разрешимым теориям.

В настоящей работе предлагается значительно более общая теорема существования конструктивных моделей, которая полезна и для решения многих проблем продолжения конструктивизаций. В качестве примеров новых результатов, полученных с помощью этой теоремы, можно указать характеристику тех алгебраических расширений конструктивных полей, на которые продолжается конструктивизация исходного поля, существование конструктивизаций пополнений конструктивных локально нильпотентных групп без кручения. Точные формулировки этих и других утверждений приводятся ниже.

2. Пусть σ — не более чем счетная сигнатура, содержащая только предикатные символы и символы для констант. В рассматриваемых ниже примерах алгебр нужно стандартным образом перейти от функций к предикатам. Будем считать, что σ снабжена некоторой нумерацией $v_\alpha: N \rightarrow \sigma$ такой, что множество номеров символов констант рекурсивно, а число мест предикатного символа есть частично рекурсивная функция на номерах предикатных символов. Эта нумерация определяет стандартным образом гёделевскую нумерацию всех формул сигнатуры σ . Эта нумерация позволяет говорить о рекурсивных и рекурсивно перечислимых подмножествах сигнатуры σ и рекурсивных и рекурсивно перечислимых множествах формул сигнатуры σ .

Пусть Φ — некоторая совокупность формул сигнатуры σ , каждая из которых имеет только одну свободную переменную v . Если $\mathcal{M}$ — модель сигнатуры σ , то элемент $a \in M$ назовем Φ -алгебраическим (в $\mathcal{M}$), если существует такая формула $\varphi(v) \in \Phi$, что 1) $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и 2) множество $\{b \in M, \mathcal{M} \models \varphi(b)\}$ конечно.

Совокупность всех Φ -алгебраических элементов модели $\mathcal{M}$ обозначим $A_\Phi(\mathcal{M})$. Если $\sigma' \subseteq \sigma$ и для $a \in \sigma'$ $v = a \in \Phi$, то модель сигнатуры σ' , определенную множеством $A_\Phi(\mathcal{M})$ как σ -подмодель модели $\mathcal{M}$, обозначим $[\mathcal{M}]_{\Phi\sigma'}$.

Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ , $\sigma' \subseteq \sigma$, Φ — некоторая совокупность формул сигнатуры σ , имеющих только одну свободную переменную v , и для $a \in \sigma'$ $v = a \in \Phi$. Будем говорить, что теория T имеет (σ', Φ) -ядро, если (*): существует модель $\mathcal{M}_0$ теории T такая, что для любой модели $\mathcal{M}_1$ теории T существует σ' -изоморфизм λ модели $[\mathcal{M}_0]_{\Phi\sigma'}$ в модель $[\mathcal{M}_1]_{\Phi\sigma'}$ такой, что для любой формулы $\varphi(v) \in \Phi$ и элемента $a \in A_\Phi(\mathcal{M}_0)$

$$\mathcal{M}_0 \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models \varphi(\lambda a).$$

Если теория T имеет (σ', Φ) -ядро, то через $s(T)_{\Phi}^{\sigma'}$ обозначим однозначно определенную условием (*) модель $[M_0]_{\Phi}^{\sigma'}$ сигнатуры σ' . Эту модель $s(T)_{\Phi}^{\sigma'}$ и назовем (σ', Φ) -ядром T .

Основная теорема. Пусть T — рекурсивно аксиоматизируемая теория, Φ — рекурсивно перечислимое множество формул сигнатуры σ , имеющих только одну свободную переменную, σ' — рекурсивно перечислимое подмножество σ .

Если T имеет (σ', Φ) -ядро, то модель $s(T)_{\Phi}^{\sigma'}$ конструктивизируема.

3. Сформулируем точно проблему продолжения конструктивизации. Если $M_0 \subseteq M_1$, $v_0: N \rightarrow M_0$ — нумерация M_0 такая, что (M_0, v_0) — конструктивная модель (т. е. v_0 — конструктивизация M_0), то вопрос о существовании конструктивизации $v_1: N \rightarrow M_1$ модели M_1 такой, что вложение M_0 в M_1 есть морфизм из (M_0, v_0) в (M_1, v_1) , называется проблемой продолжения конструктивизации v_0 модели M_0 до конструктивизации расширения M .

Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения. А. И. Мальцев ⁽¹³⁾ доказал существование и единственность полной (делимой) локально нильпотентной группы без кручения G^* , содержащей G и такой, что для любого $g \in G^*$ существует $n > 0$ такое, что $g^n \in G$. Эта группа называется пополнением G .

Теорема 1. Если G — локально нильпотентная группа без кручения. G^* — пополнение G , то всякая конструктивизация группы G продолжается до конструктивизации G^* .

Аналогичная теорема справедлива и для π -пополнений локально нильпотентных групп без π -кручения, когда π — рекурсивно перечислимое множество простых чисел ⁽¹²⁾.

Все результаты работ ^(1, 2, 8) о продолжении конструктивизаций легко получаются из основной теоремы. Следующая теорема расширяет известные ⁽¹⁾ результаты о нормированных полях. Используется терминология книги ⁽¹⁰⁾.

Теорема 2. Всякая конструктивизация нормального квазилокального кольца R (с предикатом, выделяющим максимальный идеал в сигнатуре) продолжается до конструктивизации гензелизации R^* кольца R .

Рассмотрим случай алгебраического расширения конструктивного поля.

Теорема 3. Для того чтобы конструктивизация поля F продолжалась до конструктивизации алгебраического расширения F' поля F , необходимо и достаточно, чтобы семейство всех конечных множеств многочленов от счетного числа переменных над полем F , которые имеют корень в F' , было рекурсивно перечислимым.

В случае, когда F' — сепарабельное расширение, достаточно рекурсивной перечислимости семейства многочленов от одной переменной над F , имеющих корень в F' .

4. Обратимся теперь к вопросам единственности продолжения конструктивизации. Сначала несколько определений. Морфизм $\varphi: (M_0, v_0) \rightarrow (M_1, v_1)$ нумерованных моделей называется эквивалентностью, если φ есть изоморфизм модели M_0 на модель M_1 , а обратное отображение φ^{-1} также является морфизмом из (M_1, v_1) в (M_0, v_0) . Если еще имеются морфизмы $\psi_0: (M, v) \rightarrow (M_0, v_0)$ и $\psi_1: (M, v) \rightarrow (M_1, v_1)$, то эквивалентность $\varphi: (M_0, v_0) \rightarrow (M_1, v_1)$ называется эквивалентностью над (M, v) , если $\varphi\psi_0 = \psi_1$. Проблемой единственности для соответствующей проблемы продолжения конструктивизации $((M_0, v_0), M_0 \subseteq M_1)$ является вопрос, не будут ли всегда нумерованные модели (M_1, v_1) и (M_1, v_1') эквивалентны над (M_0, v_0) , если v_1 и v_1' — конструктивизации M_1 , продолжающие v_0 ? Если ответ положителен, то будем говорить, что проблема продолжения конструктивизации имеет не более одного решения или, в случае ее разрешимости, имеет единственное решение (с точностью до эквивалентности над (M_0, v_0)).

Легко проверить, что в случае, рассмотренном в теореме 1, имеется единственное решение. Не более одного решения может иметь проблема продолжения для чисто несепарабельных расширений конструктивных полей.

Укажем пример, когда отсутствует единственность.

Пример 1. Существует конструктивное поле, являющееся алгебраическим расширением поля рациональных чисел Q , для которого проблема продолжения конструктивизации на алгебраическое замыкание имеет не единственное решение.

Пусть $\bar{Q} \equiv Q$ — алгебраическое замыкание Q , $\bar{\nu}$ и ν — конструктивизации полей $\bar{Q}$ и Q соответственно такие, что вложение есть морфизм из (Q, ν) в $(\bar{Q}, \bar{\nu})$. Будем предполагать также, что $\bar{\nu}$ и ν — однозначные нумерации.

Пусть f — общерекурсивная одноместная функция такая, что для любого $k \in N$ $(\bar{\nu}f(k))^2 = p_k$; здесь квадрат обозначает соответствующую операцию в поле $\bar{Q}$, а p_k — это k -е простое число как элемент поля $Q \subseteq \bar{Q}$. Пусть $R = \{k | \kappa_k \text{ определена в точке } f(k)\}$, κ_k — это одноместная частично рекурсивная функция Клиниевского номера k . R — рекурсивно перечислимое множество, следовательно, поле $Q' = Q(\sqrt[p_k]{} : k \in R)$, полученное присоединением корней квадратных из p_k для $k \in R$, будет рекурсивно перечислимым подмножеством $\bar{Q}$, и поэтому существует конструктивизация ν' этого поля такая, что вложение есть морфизм из (Q', ν') в $(\bar{Q}, \bar{\nu})$. Рассмотрим автоморфизм φ поля Q' , определенный так: $\varphi(\sqrt[p_k]{}) = \sqrt[p_k]{}$, если $\kappa_k(f(k)) \neq f(k)$, и $\varphi(\sqrt[p_k]{}) = -\sqrt[p_k]{}$ в противном случае. Нетрудно проверить, что если рассматривать φ как отображение из Q' в $\bar{Q}$, то φ будет морфизмом из (Q', ν') в $(\bar{Q}, \bar{\nu})$. Тогда $(Q', \nu') \xrightarrow{\text{id}} (\bar{Q}, \bar{\nu})$ и $(Q', \nu') \xrightarrow{\varphi} (\bar{Q}, \bar{\nu})$ есть два решения проблемы продолжения конструктивизации на алгебраическое замыкание. Оказывается, что эти два решения не эквивалентны над (Q', ν') .

Следующее условие на конструктивное поле имеет много важных следствий (P): существует алгоритм расщепления для (F, ν) или, что равносильно, множество неприводимых над F многочленов от одной переменной над F рекурсивно.

Теорема 4. Если (F, ν) удовлетворяет условию (P), то существует не более одного продолжения конструктивизации на всякое нормальное расширение поля F .

Пример 2. Существует конструктивное поле, не удовлетворяющее условию (P), но удовлетворяющее заключению теоремы.

В работе (7) построен пример конструктивного поля характеристики $p \neq 0$, удовлетворяющего условию (P) и такого, что присоединение корня уравнения $x^p - a = 0$ для некоторого $a \in F$ нарушает условие (P). Поле $F(a^{1/p})$ и обладает нужными свойствами.

Пусть (F, ν) — конструктивное поле, $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание F и $\bar{\nu}$ — продолжение ν на $\bar{F}$. Пусть $\bar{F}_s$ — сепарабельное замыкание F . Для семейства S всех конечно порожденных расширений поля F , лежащих в $\bar{F}$, определим нумерацию φ так: если x — стандартный номер конечного множества M , то $\varphi(x) = \bar{\nu}(M)$. На множестве S определим следующие операторы: $\Phi_0(F') = F' \cap \bar{F}_s$ — наибольшее сепарабельное расширение F , лежащее в F' ; $\Phi_1(F')$ — наименьшее нормальное расширение, содержащее F' . Обозначим через $G(F')$ группу Галуа расширения Галуа $\Phi_0\Phi_1(F')$ поля F .

Теорема 5. Пусть (F, ν) удовлетворяет условию (P); тогда: 1) множество $\{\langle x, y \rangle | \varphi(x) \in \bar{F}_s, \varphi(x) = \varphi(y)\}$ рекурсивно; 2) Φ_0 и Φ_1 — морфизмы нумерованного множества (S, φ) в себя; 3) G — морфизм нумерованного множества (S, φ) в нумерованное множество всех конечных групп.

В п. 3) теоремы 5 имеется в виду нумерация конечных групп, индуцированная естественной нумерацией всех конечных таблиц Кэлли. Этот

п. 3) содержит классический результат об эффективном нахождении групп Галуа многочлена над полем с условием (P) ⁽¹¹⁾.

Теорема 5 вместе с теоремой 3 влечет ряд следствий о возможности (и по теореме 4, единственности) конструктивизаций многих алгебраических расширений поля с условием (P) , например: существует продолжение конструктивизации на 1) максимальное разрешимое (в смысле теории Галуа) расширение; 2) максимальное нильпотентное (абелево) расширение; 3) максимальное p -расширение и т. п.

5. Укажем еще один возможный путь использования основной теоремы. Пусть $\mathcal{M}$ — модель сигнатуры σ' , $\sigma' \subseteq \sigma$ и T — теория сигнатуры σ . Предположим, что существует σ -обогащение модели $\mathcal{M}$, которое есть модель теории T . Если $\mathcal{M}$ снабжена конструктивизацией, то можно интересоваться теми σ -обогащениями, которые сохраняют конструктивность. Следующая теорема, являющаяся следствием основной теоремы, указывает достаточные условия для существования таких обогащений.

Теорема 6. Пусть σ' — рекурсивно перечислимое подмножество σ , T — рекурсивно аксиоматизируемая теория сигнатуры σ , $(\mathcal{M}, \nu)$ — конструктивная модель сигнатуры σ' такая, что существует и только конечное число σ -обогащений модели $\mathcal{M}$ до подмодели модели теории T ; тогда любое такое обогащение сохраняет конструктивность.

То, что условие конечности нельзя отбросить, показывает следующий

Пример 3. Существует конструктивное формально вещественное поле, на котором нет конструктивного линейного порядка.

Используем обозначения примера 1. Пусть $Q_0 = Q(\sqrt[n]{p_n} : n \in \mathbb{N})$. Полагаем для $k \in R$ $\alpha_k = \sqrt[n]{f(k)}$, если $\kappa_k(f(k)) = 0$ и $\alpha_k = \sqrt[n]{-f(k)}$, если $\kappa_k(f(k)) > 0$. Тогда поле $Q_1 = Q_0(\alpha_k : k \in R)$ конструктивизируемо и обладает нужными свойствами.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
8 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Л. Ершов, Сильно конструктивные модели, В сборн. Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1972. ² Y. L. Ershov, Numbered Fields In: LMPHS III, Amsterdam, 1968, p. 31. ³ А. И. Мальцев, УМН, 16, 3 (1961). ⁴ А. И. Мальцев, ДАН, 146, 1009 (1962). ⁵ А. И. Мальцев, ДАН, 145, 276 (1962). ⁶ A. Cobham, J. Symb. Log., 28, 72 (1963). ⁷ A. Fröhlich, I. C. Shepherdson, Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A, 248, 407 (1958). ⁸ M. O. Rabin, Trans. Am. Math. Soc., 95, 341 (1960). ⁹ R. L. Vaught, J. Symb. Log., 25, 39 (1960). ¹⁰ M. Nagata, Local Rings, N. Y., 1962. ¹¹ Ван-дер Варден, Современная алгебра, 1, М., 1947. ¹² М. И. Каргаполов, Алгебра и логика, 1, № 1, 5 (1962). ¹³ А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 201 (1949).