

Член-корреспондент АН СССР В. К. ИВАНОВ

ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УМНОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ШВАРЦА

1. Среди ряда теорий умножения распределений существует направление, при котором распределения отождествляются с некоторыми классами функций $(1-5)$. При таком подходе умножение распределений сводится к умножению соответствующих функций. Эта идея положена и в основу настоящей заметки. В ней пространство $\mathcal{D}'$ распределений Л. Шварца расширяется до линейного пространства $\mathcal{D}^*$, элементы которого называются гиперраспределениями. Произведение двух распределений всегда однозначно определяется и является, вообще говоря, гиперраспределением. В отличие от $(1-5)$ это позволяет учитывать совпадающие особенности сомножителей.

Каждому распределению $f(x) \in \mathcal{D}'$ можно поставить в соответствие функцию $\hat{f}(z) = \hat{f}(x + iy)$, аналитическую вне носителя $f(x)$, которая называется представлением Коши распределения $f(x)$ (3) . Вместо $\hat{f}(z)$ нам будет удобнее пользоваться функцией

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [\hat{f}^+(z) + \hat{f}^-(\bar{z})], \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \\ \hat{f}^+(z) &= \hat{f}(x + iy), \quad -\hat{f}^-(x - iy) = \hat{f}^-(\bar{z}), \quad y > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Функцию $f(x, y)$ будем называть аналитическим представлением распределения $f(x)$, будем считать всегда, что $y > 0$. Как известно (7) , $\lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) = f(x)$ в слабой топологии пространства $\mathcal{D}'$. Множество всех

аналитических представлений распределений из $\mathcal{D}'$ есть линейное пространство, которое мы обозначим через M . Принадлежность функции вида (1) к M характеризуется ее ростом при $|z| \rightarrow \infty$, $y \rightarrow +0$ (4) .

Пространство $\mathcal{D}'$ есть гомоморфный образ пространства M , ядро соответствующего гомоморфизма обозначим через N . На основании (4) , с учетом (1) , N состоит из функций вида $g(x, y) = g(z) - g(\bar{z})$, где $g(z)$ — целая функция. Отсюда следует, что $\mathcal{D}'$ изоморфно фактор-пространству M/N и поэтому распределения $f(x) \in \mathcal{D}'$ можно отождествить с классами вычетов $f(x, y) + N$, где $f(x, y)$ — одно из аналитических представлений распределения $f(x)$.

2. Обозначим через M^* алгебру, порождаемую функциями из пространства M . Элементы этой алгебры имеют вид

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^n \hat{f}_j^+(z) \hat{f}_j^-(\bar{z}), \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad y > 0. \quad (2)$$

Функции (2) характеризуются тем же порядком роста при $|z| \rightarrow \infty$, $y \rightarrow +0$, что и (1) .

При фиксированном $y > 0$ функция $f(x, y)$ может рассматриваться как элемент пространства $\mathcal{D}'$, поэтому для каждой $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеет смысл скалярное произведение

$$\langle f(x, y), \varphi(x) \rangle = \int f(x, y) \varphi(x) dx.$$

Обозначим через N^* линейное подпространство элементов вида (2), для которых $\lim_{y \rightarrow +0} \langle f(x, y), \varphi(x) \rangle = 0$ для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Классы вычетов M^* по $\text{mod } N^*$ будем называть гиперраспределениями, функции вида (2), входящие в соответствующий класс, — аналитическими представлениями гиперраспределений. Если в классе $f(x) = f(x, y) + N^*$ имеется функция вида (1) $f_1(x, y) = \hat{f}_1^+(z) + \hat{f}_1^-(\bar{z})$, то мы отождествим $f(x)$ с распределением $f_1(x)$, для которого $f_1(x, y)$ является аналитическим представлением.

3. Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ — аналитическое представление распределения $f(x) \in \mathcal{D}$, $g(z)$ — целая функция.

Тогда для каждой $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеет место равенство

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int f(x, y) [g(z) - g(\bar{z})] \varphi(x) dx = 0, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (3)$$

Доказательство. Можно записать $g(x + iy) - g(x - iy) = y h(x, y)$, где $h(x, y)$ есть целая функция переменных x и y . Функция $\varphi(x)$ как элемент пространства $\mathcal{D}$ имеет компактный носитель K . Тогда

$$\begin{aligned} \int f(x, y) [g(z) - g(\bar{z})] \varphi(x) dx &= y \psi(y), \\ \psi(y) &= \int_K f(x, y) h(x, y) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что $\psi(y)$ ограничена при $y \in [0, y_0]$, $y_0 > 0$. Пусть (a, b) — конечный интеграл, содержащий K . Обозначим $\Delta = [a, b]$, а через $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице на Δ и нулю вне некоторой окрестности $U(\Delta)$ сегмента Δ , и положим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha(x) f(x), \quad f_2(x) = (1 - \alpha(x)) f(x), \\ f(x) &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

В соответствии с этим $\psi(y)$ разобьется на сумму

$$\psi(y) = \psi_1(y) + \psi_2(y).$$

$f_1(x)$ — распределение с компактным носителем $K_1 \subset \overline{U(\Delta)}$, и поэтому существуют такая непрерывная функция $f_0(x)$ и такое $n \geq 0$, что $f_1(x) = D_x^n f_0(x)$. Если $f_1(x, y)$ и $f_0(x, y)$ — аналитические представления распределений $f_1(x)$ и $f_0(x)$, то

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \int_K f_1(x, y) h(x, y) \varphi(x) dx = \int_K [D_x^n f_0(x, y)] h(x, y) \varphi(x) dx = \\ &= (-1)^n \int_K f_0(x, y) D_x^n [h(x, y) \varphi(x)] dx; \end{aligned}$$

$f_0(x, y) = \hat{f}_0^+(z) + \hat{f}_0^-(\bar{z}) = \frac{y}{\pi} \int \frac{f_0(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ — есть гармоническая функция, непрерывная в полуплоскости $y \geq 0$. Функция $D_x^n [h(x, y) \varphi(x)]$ также непрерывна при $y \geq 0$. Отсюда следует, что $\psi_1(y)$ непрерывна при $y \geq 0$ и, следовательно, ограничена при $y \in [0, y_0]$. Пусть $f_2(z)$ — представление Коши распределения $f_2(x)$. Эта функция аналитична вне носителя $f_2(x)$ ⁽⁶⁾, в частности, как функция $z = x + iy$, она непрерывна на (a, b) . Поэтому аналитическое представление $f_2(x, y) = \hat{f}_2^+(z) + \hat{f}_2^-(\bar{z})$ — функция, непрерывная на $Q = K \times [0, y_0]$. Но $h(x, y) \varphi(x)$ также непрерывна на Q . Тогда и $\psi_2(y)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на $[0, y_0]$.

Следствие. Имеет место включение

$$MN \subset N^*. \quad (4)$$

4. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — аналитические представления распределений $f(x)$ и $g(x)$. Произведением $h(x) = f(x) \circ g(x)$ этих распределений будем называть гиперраспределение, аналитическое представление которого есть $h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$.

На основании (4)

$$[f(x, y) + N][g(x, y) + N] = h(x, y) + f(x, y)N + g(x, y)N + N^2 \subset h(x, y) + N^*;$$

поэтому произведение $f(x) \circ g(x)$ не зависит от выбора представителей в классах $f(x, y) + N$ и $g(x, y) + N$ и определяется однозначно.

Аналогично можно ввести и n -арное произведение: если $f_j(x, y)$ — аналитические представления распределений $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, то будем называть произведением $f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_n = h$ такое гиперраспределение $h(x)$, аналитическое представление которого есть $h(x, y) = \prod_{j=1}^n f_j(x, y)$. Однако

здесь произведение, вообще говоря, не будет принадлежать одному классу по $\text{mod } N^*$, поэтому без дополнительных ограничений нельзя добиться однозначности произведения (см. ниже вычисление $\delta^3(x)$).

n -Арное произведение получается однозначным, если вместо $\mathcal{D}'$ рассматривать такие пространства распределений, в которых аналитическое представление единственно. Сюда относятся, например, пространства $\mathcal{O}_\alpha'$ при $\alpha \geq -2$ (см. (6)).

Дать хорошее определение для произведения гиперраспределений не удастся, так как N^* не является идеалом в алгебре M^* .

5. Теорема 2. Имеют место включения

$$\mathcal{D}_x N \subset N, \quad \mathcal{D}_x N^* \subset N^*, \quad \mathcal{D}_x = \partial / \partial x. \quad (5)$$

Это утверждение следует непосредственно из определения пространств N и N^* .

Пусть $h(x) = h(x, y) + N^*$ — гиперраспределение. Его производной будем называть гиперраспределение $h'(x) = \mathcal{D}_x h(x, y) + N^*$. Однозначность производной следует из теоремы 2, так как в силу (5)

$$\mathcal{D}_x h(x) = \mathcal{D}_x h(x, y) + \mathcal{D}_x N^* \subset \mathcal{D}_x h(x, y) + N^*.$$

Теорема 3. Для производной произведения распределений $f(x)$ и $g(x)$ справедлива формула

$$\mathcal{D}_x(f \circ g) = \mathcal{D}_x f \circ g + f \circ \mathcal{D}_x g. \quad (6)$$

Для доказательства надо использовать определение произведения и включения (4) и (5).

6. Дадим несколько примеров. На основании (1) и таблиц из (6) можно получить ряд соотношений, обобщающих формулы, приведенные в (8) и (9), например,

$$\frac{1}{\pi^2} P(x^{-m}) \circ P(x^{-n}) - \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(x) \circ \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\pi^2} P(x^{-m-n}),$$

$$\delta_+(x) \circ \delta_-(x) = -\frac{1}{4\pi^2} P(x^{-2}) - \frac{1}{2} \delta^2(x),$$

$$x_+^{-1/2} \circ x_-^{-1/2} = \frac{1}{2}\pi \delta(x).$$

В качестве примера тройного произведения приведем следующий:

$$\delta^3(x) = \frac{1}{4\pi^2} \delta^2(x) - \frac{3}{2\pi^2} \delta(x) \circ P(x^{-2}) + C \delta(x),$$

где C — произвольная постоянная.

Для аналитических представлений функции Хаттори $\theta(x)$ и ее квадрата $\theta^2(x)$ имеем (см. (6))

$$\theta(x) \propto 1 - \arg z, \quad \theta^2(x) \propto (1 - \arg z)^2.$$

Используя определение пространства N^* убеждаемся, что $(1 - \arg z)^2 \equiv \equiv 1 - \arg z \pmod{N^*}$, следовательно,

$$\theta^2(x) = \theta(x).$$

Дифференцируя, получим

$$\theta(x) \circ \delta(x) = 1/2 \delta(x).$$

Другими способами эта формула получена в (10) и (11).

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Получило
29 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Y. Hirata, H. Ogata, J. Sci. Hiroshima, Univ. ser., A-I, 22, № 2, 147 (1958).
² J. Mikusinski, Studia Math., 21, № 3, 253 (1962). ³ H. J. Bremermann, L. Durand, J. Math. Phys., 2, 240 (1961). ⁴ H. G. Tillmann, Math. Zs., 77, № 2, 106 (1961). ⁵ M. Itano, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 30, № 2, 151 (1966).
⁶ Г. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, М., 1968. ⁷ E. J. Beltrami, M. R. Wohlers, Distributions and Boundary Values of Analitic Functions, N. Y.—London, 1966. ⁸ J. Mikusinski, Bull. Acad Polon., Sci., Ser. Sci. math., astr., et phys., 14, № 9, 511 (1966). ⁹ B. Fisher, Studia Math., 33, № 2, 227 (1960). ¹⁰ В. К. Иванов, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 3, 41 (1971). ¹¹ B. Fisher, Quart. J. Math., 22, № 86, 291 (1971).

Для аналитических представлений функции Хевисайда $\theta(x)$ и ее квадрата $\theta^2(x)$ имеем (см. (6))

$$\theta(x) \propto 1 - \arg z, \quad \theta^2(x) \propto (1 - \arg z)^2.$$

Используя определение пространства N^* убеждаемся, что $(1 - \arg z)^2 \equiv \equiv 1 - \arg z \pmod{N^*}$, следовательно,

$$\theta^2(x) = \theta(x).$$

Дифференцируя, получим

$$\theta(x) \circ \delta(x) = 1/2 \delta(x).$$

Другими способами эта формула получена в (10) и (11).

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
29 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Y. Hirata, H. Ogata, J. Sci. Hiroshima, Univ. ser., A-I, **22**, № 2, 147 (1958).
² J. Mikusinski, Studia Math., **21**, № 3, 253 (1962). ³ H. J. Bremermann, L. Durand, J. Math. Phys., **2**, 240 (1961). ⁴ H. G. Tillmann, Math. Zs., **77**, № 2, 106 (1961). ⁵ M. Itano, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, **30**, № 2, 151 (1966).
⁶ Г. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, М., 1968. ⁷ E. J. Beltrami, M. R. Wohlers, Distributions and Boundary Values of Analitic Functions, N. Y.—London, 1966. ⁸ J. Mikusinski, Bull. Acad. Polon., Sci., Ser. Sci. math., astr., et phys., **14**, № 9, 511 (1966). ⁹ B. Fisher, Studia Math., **33**, № 2, 227 (1960). ¹⁰ В. К. Иванов, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 3, 41 (1971). ¹¹ B. Fisher, Quart. J. Math., **22**, № 86, 291 (1971).