Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба, Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 730–740

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9361

Математические заметки

Том 91 выпуск 5 май 2012

УДК 512.542

Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами

Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба

В работе установлено точное строение конечных групп, у которых все вторые или все третьи максимальные подгруппы являются субнормальными.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Все группы в данной статье являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. n-Максимальная подгруппа группы G называется *строго n-максимальной*, если она не является n-й максимальной подгруппой ни в одной собственной подгруппе группы G.

Связь между i-максимальными подгруппами (при $i > 1$) группы G и ее структурой исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом, установившим в работе [2] сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и главный ранг группы G не превосходит 2. В дальнейшем эти результаты получили развитие в нескольких направлениях. Отметим, в частности, работу [3] Аграваля, где было доказано, что группа является сверхразрешимой, если каждая ее 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна (подгруппа H группы G называется *S-квазинормальной* или *S-перестановочной* в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). Отмеченные выше результаты послужили основой для работы Полякова [4], где было доказано, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами, а также для работы Асаада [5], где были получены аналоги результатов Хупперта для строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгрупп. Заметим попутно, что в работе Флавелла [6] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащей строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается. Еще одним естественным развитием упомянутых выше результатов стала работа Манна [7], в которой было начато исследование строения групп с субнормальными n-максимальными подгруппами.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. Отметим, в частности, что в работе [8] Го Шуин и Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [9]–[11] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, Скибой и Шамом были получены новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе Ли Широнга [12] получена классификация ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которых является TI-подгруппой. В работе [13] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [14] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. В связи с последними двумя результатами вполне естественной является задача Монахова и Тавгеня (см. вопрос 3.10 в обзоре [15]) об описании групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Решение этой задачи в ненильпотентном случае было получено в недавней работе [16]. Попутно в этой же работе, завершая отмеченные выше результаты Хупперта, авторы получили описания ненильпотентных групп, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы нормальны. Отметим также работу Луценко и Скибы [17], где получено полное описание групп, в которых все вторые или все третьи максимальные подгруппы S-квазинормальны. В связи с этим результатом и тем, что каждая S-квазинормальная подгруппа группы является в ней субнормальной, возникает задача о получении точного строения групп с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами. В данной работе мы решаем эту задачу, опираясь на результаты, полученные в упомянутой выше работе Манна [7].

2. Строение групп, у которых все вторые максимальные подгруппы субнормальны. Приведем некоторые свойства групп Шмидта, необходимые для доказательства основного результата (см. [18; гл. VI]).

Лемма 1. *Если G – группа Шмидта, то*

(1) *$G = [P]\langle a\rangle$, где P и $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно;*

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$;*

(3) *$G' = P$;*

(4) *$\Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q\rangle$;*

(5) *$P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G, причем, если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q;*

(6) *наибольшая нормальная подгруппа группы G, строго содержащаяся в P, совпадает с $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;*

(7) *если P абелева, то она элементарна;*

(8) *если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p.*

Следующие три леммы необходимы для доказательства основного результата данной работы.

Лемма 2 [7; лемма 1]. *Если каждая n-максимальная подгруппа группы G субнормальна, то каждая $(n-1)$-максимальная подгруппа группы G является нильпотентной.*

Лемма 3 [7; лемма 3]. *Пусть $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. В том и только в том случае каждая n-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда каждая n-максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$.*

Лемма 4 [7; следствие 1]. *Если каждая вторая максимальная или каждая третья максимальная подгруппа группы G субнормальна, то G разрешима.*

Следующая лемма описывает группы, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является субнормальной.

Лемма 5. *В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является субнормальной. В силу леммы 2 каждая максимальная подгруппа из G является нильпотентной, и поэтому $G = [P]\langle a\rangle$ – группа Шмидта, где P и $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G соответственно (см. лемму 1 (1)). Тогда по лемме 1 (4) $F(G) = P\langle a^q\rangle$.

Предположим, что $P' \neq 1$. Тогда по лемме 1 (2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$. Пусть E – максимальная подгруппа в группе $P'\langle a\rangle$ такая, что $\langle a\rangle \subseteq E$. Тогда, очевидно, $E \not\subseteq F(G)$. По условию E является субнормальной подгруппой в G и поэтому, ввиду леммы 3, $E \subseteq F(G)$; противоречие. Следовательно, $P' = 1$, и поэтому G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Достаточность. Предположим, что $G = [P]\langle a\rangle$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Покажем, что каждая 2-максимальная подгруппа из G субнормальна. В силу леммы 3 для этого достаточно показать, что каждая 2-максимальная подгруппа из G содержится в $F(G)$. Так как группа G имеет точно два класса максимальных подгрупп $P\langle a^q\rangle$ и $\langle a\rangle^x$ (см. лемму 1 (2)), то представителями 2-максимальных подгрупп в G являются подгруппы $P_1\langle a^q\rangle, P\langle a^{q^2}\rangle$ и $\langle a^q\rangle$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P. Так как $F(G) = P\langle a^q\rangle$, очевидно, каждая 2-максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если в группе G каждая 2-максимальная подгруппа субнормальна и $|\pi(G)| > 2$, то группа G нильпотентна.*

Следствие 2. *В том и только в том случае в ненильпотентной группе G каждая 2-максимальная подгруппа нормальна, когда G – сверхразрешимая группа Шмидта.*

Следствие 3 [17; лемма 2.2]. *В том и только в том случае в ненильпотентной группе G каждая 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна, когда G – сверхразрешимая группа Шмидта.*

Следствие 4 (Хупперт [2]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 5 (Манн [7]). *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G субнормальна в G, то G разрешима.*

Следующий пример показывает, что в общем случае класс групп с субнормальными вторыми максимальными подгруппами шире класса групп, в которых все вторые максимальные подгруппы S-квазинормальны.

Пример 1. Пусть P – нециклическая группа порядка 4, Q – циклическая группа порядка 9, V – максимальная подгруппа из Q. Существует гомоморфизм f из Q в $\mathrm{Aut}(P)$ такой, что $\mathrm{Ker}\, f = V$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_Q(P) = V$. Ясно, что G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Очевидно, что группа G имеет 2-максимальную подгруппу H порядка 6 такую, что H является субнормальной подгруппой в G, но не является ее S-квазинормальной подгруппой.

3. Строение групп, у которых все третьи максимальные подгруппы субнормальны. В дальнейшем p, q и r – попарно различные простые числа. В следующей теореме P, Q и R обозначают некоторые силовскую p-подгруппу, силовскую q-подгруппу и силовскую r-подгруппу группы G соответственно.

Теорема 1. *В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа одного из следующих типов:*

I. *$G = [P]Q$ – группа Шмидта, где либо $P' = 1$, либо $|P'| = p$;*

II. *G – бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) *$G = [P]Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G, Q – циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ – группа Шмидта;*

(2) *$G = ([P]Q_1) \times C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G, $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;*

(3) *$G = [P]Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = |b| = q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ – группы Шмидта;*

(4) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;*

(5) *$G = ([P]Q_1)C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G,*

$$Q_1 = \langle a\rangle, \quad C_q = \langle b\rangle, \qquad |Q_1C_q| = q^\beta, \quad |a| = q^{\beta-1}, \quad \beta \in \mathbb{N},$$

PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;

(6) *$G = [P]Q$, где $\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;*

(7) *G – подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) $G = [P_1 \times C_p]Q$, *где* P_1 *– минимальная нормальная* p*-подгруппа группы* G, $|C_p| = p$, P_1Q *– группа Шмидта, максимальная подгруппа из* Q *содержится в* $Z(G)$ *и* $[C_p, Q] = 1$;

(9) $G = [[P_1]Q]C_p$, *где* $|P_1| = |C_p| = p$, $|Q| = q$ *и* $N_G(Q) = [Q]C_p$;

III. G *– группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r *и которая является группой одного из следующих видов*:

(i) $G = [P \times R]Q$, *где* P *и* R *– минимальные нормальные подгруппы группы* G, Q *– циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ *– минимальная нормальная подгруппа группы* G.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что G – ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является субнормальной. Тогда в силу леммы 2 каждая 2-максимальная подгруппа группы G является нильпотентной. Заметим также, что в силу леммы 4 группа G разрешима. Понятно, что каждая собственная подгруппа H группы G является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. Причем, если H – группа Шмидта, то H максимальна в G. Поскольку в разрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы есть степень простого числа и число различных простых делителей порядка группы Шмидта равно двум, то $\pi(G) \leqslant 3$.

I. Предположим вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Если P – абелева группа, то G является группой типа I.

Пусть теперь P – неабелева группа. Тогда $|P'| = |\Phi(P)| \neq 1$. Если $|\Phi(P)| \geqslant p^2$, то в группе $\Phi(P)Q$ существует такая 2-максимальная подгруппа E, что $Q \leqslant E$. Ясно, что E является 3-максимальной подгруппой в G и $E \nsubseteq F(G)$, что противоречит лемме 3. Следовательно, $|P'| = |\Phi(P)| = p$ и G снова является группой типа I.

II. Теперь предположим, что G не является группой Шмидта и $\pi(G) = \{p, q\}$, где $p \neq q$.

Допустим вначале, что группа G имеет нормальную силовскую подгруппу P, т.е. $G = [P]Q$. Предположим, что группа G имеет пару подгрупп Шмидта вида $A = [P]Q_1$ и $B = [P_1]Q$, где $P_1 < P$, $Q_1 < Q$. Понятно, что A и B являются максимальными подгруппами в группе G. Так как в группе A каждая 2-максимальная подгруппа является субнормальной, то по лемме 5 P – абелева группа. Следовательно, P является минимальной нормальной подгруппой в группе A, а следовательно, и в группе G. Аналогично можно показать, что P_1 является минимальной нормальной подгруппой в G, что невозможно. Таким образом, либо все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, либо все они содержат силовскую q-подгруппу из G.

Если все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, то $G = [P]Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G.

Допустим, что Q – абелева группа. Если при этом группа Q циклическая, то G является группой типа II (1).

Предположим теперь, что Q – нециклическая группа. Пусть H – подгруппа Шмидта группы G. Тогда $|G : H| = q$ и $H = [P]Q_1$, где Q_1 – циклическая максимальная подгруппа в Q. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Пусть Q_2 – максимальная подгруппа в Q_1. Тогда подгруппа PQ_2C_q является максимальной в группе G. Понятно, что эта подгруппа не является группой Шмидта и, следовательно, она нильпотентна. Это влечет $[P, C_q] = 1$ и поэтому G является группой типа II (2).

Если предположить, что максимальная подгруппа Q_2 группы Q_1 единична, то подгруппа PC_q является максимальной в группе G. Если при этом подгруппа PC_q нильпотентна, то G снова является группой типа II (2). Если же PC_q – группа Шмидта, то G является группой типа II (3).

Пусть теперь Q – неабелева группа и $|Q| = q^\beta$, $\beta \in \mathbb{N}$. Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то в силу [19; V, теорема 4.4] Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$ и поэтому подгруппы вида $\langle a^2\rangle$, $\langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в Q. Так как P – минимальная нормальная подгруппа в G, то Q является максимальной подгруппой в G. Тогда подгруппы $\langle a^2\rangle$, $\langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 3-максимальными в группе G. В силу условия и леммы 3 каждая из этих подгрупп содержится в группе $F(G)$, что невозможно. Следовательно, Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Тогда в силу $q = 2$ и леммы 1 (5), (7) мы имеем $|P| = p$, и поэтому G является группой типа II (4).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$ либо q нечетное простое, то по [19; V, теорема 4.4] Q изоморфна одной из групп: $M_\beta(q)$, D_β, Q_β или S_β (см. [19; с. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β, Q_β или S_β, то в силу [19; V, теорема 4.3] факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна группе $D_{\beta-1}$. В этом случае факторгруппа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа Q имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы и поэтому в группе Q существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе G существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2, которые содержат P и не являются группами Шмидта. Тогда M_1 и M_2 являются нильпотентными нормальными подгруппами в G и поэтому группа $G = M_1M_2$ нильпотентна; противоречие. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп: D_β, Q_β или S_β.

Таким образом, группа Q изоморфна группе

$$M_\beta(q) = \left\langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1,\ a^b = a^{1+q^{\beta-2}} \right\rangle$$

(см. [19; с. 190]). В этом случае группа G имеет вид $G = [[P]Q_1]C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G,

$$Q_1 = \langle a\rangle, \quad |a| = q^{\beta-1}, \quad C_q = \langle b\rangle, \quad |b| = q,$$

PQ_1 – группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$.

Пусть $\mathcal{C}$ – множество всех подгрупп группы G, изоморфных подгруппе C_q. Предположим, что для некоторой подгруппы C_1 из $\mathcal{C}$ выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа PC_1 является группой Шмидта. Тогда PC_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому $|Q| = q^2$, что противоречит неабелевости Q. Таким образом, G является группой типа II(5).

Предположим теперь, что любая подгруппа Шмидта группы G содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G. Это означает, что $Q = \langle a\rangle$ – циклическая группа и $P\langle a^q\rangle$ – максимальная подгруппа группы G с индексом, равным q. Так как подгруппа $P\langle a^q\rangle$ не является группой Шмидта, она нильпотентна. Следовательно, $P\langle a^q\rangle = P\times\langle a^q\rangle = F(G)$ и поэтому $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$. При этом либо каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта, либо G имеет нильпотентную максимальную подгруппу, содержащую силовскую q-подгруппу группы G.

Предположим, что верен первый случай. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G вида P_1Q^x, где $P_1 < P$. Так как M – группа Шмидта, в которой каждая 2-максимальная подгруппа субнормальна, в силу леммы 5 P_1 – минимальная нормальная подгруппа в M.

Предположим вначале, что P – неабелева группа. Тогда $\Phi(P)\neq 1$. Допустим, что $P_1\neq\Phi(P)$. Тогда $\Phi(P)P_1Q$ является подгруппой группы G. Так как P_1Q – максимальная подгруппа группы G, либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P)\leqslant P_1$ и поэтому $\Phi(P) = P_1$, так как P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P_1Q, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Тогда $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Таким образом, $P_1 = \Phi(P)$ и поэтому P_1 – минимальная нормальная подгруппа в G.

Так как $\Phi(P)\subseteq\Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Поскольку, каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Следовательно, G – группа типа II (6).

Теперь предположим, что P – абелева группа. Допустим, что $\Phi(P)\neq 1$. Аналогично, как и выше, можно показать, что $P_1 = \Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G и $G/\Phi(P)$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Следовательно, G снова является группой типа II(6).

Допустим теперь, что $\Phi(P) = 1$. Тогда P является элементарной p-группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $M = P_1Q^x$ группы G. Так как M – группа Шмидта и P – абелева группа, то P_1 является минимальной нормальной подгруппой в группе G.

Рассмотрим теперь максимальную подгруппу T группы G такую, что $G = [P_1]T$. Так как ввиду рассматриваемого случая $T = [P_2]Q$ – группа Шмидта ($P_2 < P$) и P – абелева группа, то P_2 является минимальной нормальной подгруппой в группе G. Таким образом, G – группа типа II (7).

Теперь предположим, что G имеет нильпотентную максимальную подгруппу M, содержащую подгруппу Q. Тогда группа M имеет вид $P_1\times Q$, где $P_1 < P$. Допустим, что $|P_1| > p$. Пусть E – 2-максимальная подгруппа в P_1Q, индекс которой равен p^2. Тогда E является субнормальной 3-максимальной подгруппой в G и $E\nsubseteq F(G)$, что противоречит лемме 3. Следовательно, $|P_1| = p$.

Пусть H – подгруппа Шмидта группы G, содержащая Q. Тогда H – максимальная подгруппа в G и поэтому $HM = G$. Пусть H_p – силовская p-подгруппа группы H. Заметим, что подгруппа P_1 не содержится в H_p, так как P_1Q – максимальная подгруппа в G. Тогда $H_p\cap P_1 = 1$, так как $|P_1| = p$, и поэтому $H\cap M = Q$. В силу леммы 5 H_p – абелева группа, и поэтому H_p является минимальной нормальной подгруппой в группе G.

Так как подгруппы P_1Q и H_pQ являются максимальными в группе G, то

$$\Phi(G) \leqslant P_1Q \cap H_pQ = (P_1 \cap H_pQ)Q.$$

Покажем, что $P_1 \cap H_pQ = 1$. Если $P_1 \cap H_pQ \neq 1$, то $P_1 < H_pQ$, так как $|P_1| = p$. Но тогда $P_1Q < H_pQ$, что невозможно, так как P_1Q – максимальная подгруппа в G. Следовательно, $P_1 \cap H_pQ = 1$ и поэтому $\Phi(G) \leqslant Q$. Так как $P' \subseteq \Phi(P) \subseteq \Phi(G)$, то $P' = 1$. Таким образом, P – абелева группа. Так как максимальная подгруппа P_1Q группы G нильпотентна, то $[P_1, Q] = 1$. Следовательно, G является группой типа II (8).

Предположим теперь, что группа G не имеет нормальных силовских подгрупп. Пусть H – нормальная подгруппа группы G с индексом, равным p. Тогда Q является подгруппой в H. Допустим, что подгруппа Q нормальна в группе H. Тогда подгруппа Q нормальна в группе G, так как подгруппа H нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $H = [P_1]Q$ является подгруппой Шмидта группы G и поэтому Q – циклическая группа. В силу леммы 5 P_1 является минимальной нормальной подгруппой в группе G.

Предположим, что $N_G(Q)$ – нильпотентная подгруппа группы G. Тогда $Q \leqslant Z(N_G(Q))$, так как Q – абелева группа. В силу [20; теорема 14.3.1] группа G обладает в этом случае нормальным q-дополнением, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ является подгруппой Шмидта в группе G с $|Q| = q$.

Подгруппы H и $N_G(Q)$ являются максимальными в группе G и поэтому $G = HN_G(Q)$. Следовательно, $P_1\langle b\rangle$ – силовская p-подгруппа группы G. По выбору подгруппы H имеем $|G : H| = p$ и поэтому $P_1 \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$. Так как $[Q]\langle b\rangle$ – группа Шмидта, подгруппа $Q\langle b^p\rangle$ нильпотентна и поэтому $\langle b^p\rangle \leqslant C_{P_1}(Q)$. С другой стороны, $[P_1]Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому, по лемме 1 (6) $C_{P_1}(Q) = 1$. Следовательно, $\langle b^p\rangle = 1$ и поэтому $|\langle b\rangle| = p$.

Итак, $P_1\langle b\rangle = [P_1]\langle b\rangle$ – максимальная подгруппа группы G, и по лемме 3 каждая 2-максимальная подгруппа из $P_1\langle b\rangle$ содержится в $F(G) = P_1$. Это влечет $|P_1| = p$ и поэтому G является группой типа II (9).

III. Наконец, рассмотрим случай, когда $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где p, q, r – различные простые делители $|G|$.

Обозначим через M некоторую нормальную подгруппу группы G такую, что $|G : M| = q$. Тогда группа M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта.

Предположим, что группа M нильпотентна. Тогда $G = [P \times R]Q$ и $M = P \times R \times Q_1$, где Q_1 – некоторая максимальная подгруппа в Q. Подгруппы PQ и RQ не могут быть обе нильпотентными, и поэтому либо PQ и RQ – группы Шмидта, либо одна из этих подгрупп, например, RQ, нильпотентна, а вторая является группой Шмидта.

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда подгруппы PQ и RQ являются максимальными в G. Следовательно, в силу леммы 5 P и R – минимальные нормальные подгруппы в G. Кроме того, по лемме 1 (1), (4) $Q = \langle a\rangle$ является циклической группой и $\langle a^q\rangle$ является подгруппой в $Z(\langle PQ, RQ\rangle) = Z(G)$.

Теперь предположим, что подгруппа $PQ = P\langle a\rangle$ является группой Шмидта, а подгруппа RQ нильпотентна. Это влечет, что подгруппа PQ максимальна в G и поэтому $G = PQ \times R$, где $|R| = r$. В силу леммы 5 P является минимальной нормальной подгруппой в G. Из того, что $\langle a^q \rangle$ является характеристической подгруппой в Q и Q нормальна в RQ, следует, что подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в RQ. Так как по лемме 1 (4), $\langle a^q \rangle$ нормальна и в группе PQ, то подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в G. Таким образом, G является группой типа III (i).

Теперь предположим, что M является группой Шмидта и G не является группой типа III (i). Не ограничивая общности, можно допустить, что $M = [R]P$, где $P = \langle b \rangle$ – циклическая группа. Тогда $G = [M]Q = [[R]P]Q$, где Q – группа простого порядка q и Q не является нормальной подгруппой в G. Действительно, если бы Q была нормальной в G подгруппой, то $G = M \times Q$ снова была бы группой типа III (i).

Так как $M = [R]P$ является группой Шмидта, в силу леммы 5 R является минимальной нормальной подгруппой группы M, а следовательно, и группы G. Предположим, что RQ – нильпотентная группа. Если при этом PQ также является нильпотентной группой, то подгруппа Q нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $PQ = [P]Q$ является группой Шмидта. Так как при этом $|P| = p$ ввиду цикличности группы P, то $C_G(R) = RQ$ и поэтому подгруппа Q нормальна в G, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

Таким образом, $RQ = [R]Q$ является группой Шмидта. Теперь предположим, что подгруппа $PQ = [P]Q$ также является группой Шмидта. Так как при этом P – циклическая группа, то $|P| = p$. Но тогда $p-1 = q\alpha$ для некоторого натурального α по лемме 1 (5). Аналогично, из того, что RQ и RP являются группами Шмидта следует, что $r^n - 1 = q\beta$ и $r^n - 1 = p\gamma$ для некоторых натуральных n, β и γ. Следовательно, $p = q\beta\gamma^{-1} = 1+q\alpha$, что невозможно. Следовательно, PQ – нильпотентная группа и поэтому $G = [R](P \times Q)$, причем из максимальности в G подгруппы RQ следует, что $P = \langle b \rangle$ является группой простого порядка p. Это влечет $R = F(G)$. В этом случае G является группой типа III (ii).

Достаточность. Предположим, что G – группа одного из типов I–III теоремы. Покажем, что каждая 3-максимальная подгруппа из G является субнормальной. В силу леммы 3 для этого достаточно показать, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в каждом из случаев I–III теоремы это верно. Теорема доказана.

Следствие 6. *Если в группе G каждая 3-максимальная подгруппа субнормальна и $|\pi(G)| > 3$, то группа G нильпотентна.*

Следствие 7 [17; теорема 3.1]. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной в G в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 3$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

(1) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$, $\beta \geqslant 3$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; всякий элемент из Q, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;*

(2) *$G = [P]Q$, где P – циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;*

(3) *$G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q – группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;*

(4) $G = ([P]Q)R$, *где* P *и* R – *минимальные нормальные подгруппы группы* G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q – *циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Следствие 8 (Хупперт [2]). *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы* G *нормальна в* G. *Тогда коммутант* G' *группы* G *является нильпотентным и порядок каждого главного фактора группы* G *не делится на* p^3 *для всех простых* p.

Следующий пример показывает, что в общем случае класс групп с субнормальными третьими максимальными подгруппами шире класса групп, в которых все третьи максимальные подгруппы S-квазинормальны.

Пример 2. Пусть $G = M \times Z_2$, где M – группа Шмидта из примера 1 и Z_2 – группа порядка 2. Очевидно, что группа M имеет 2-максимальную подгруппу H порядка 6 такую, что H субнормальна в G, но не является ее S-квазинормальной подгруппой.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. Rédei, “Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen”, *Acta Math.*, **84**:1 (1950), 129–153.

[2] B. Huppert, “Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen”, *Math. Z.*, **60**:1 (1954), 409–434.

[3] R. K. Agrawal, “Generalized center and hypercenter of a finite group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **58** (1976), 13–21.

[4] Л. Я. Поляков, “Конечные группы с перестановочными подгруппами”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1966, 75–88.

[5] M. Asaad, “Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal”, *Acta Math. Hungar.*, **54**:1-2 (1989), 9–27.

[6] P. Flavell, “Overgroups of second maximal subgroups”, *Arch. Math.* (*Basel*), **64**:4 (1995), 277–282.

[7] A. Mann, “Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 395–409.

[8] X. Guo, K. P. Shum, “Cover-avoidance properties and the structure of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2-3 (2003), 297–308.

[9] W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba, “X-semipermutable subgroups of finite groups”, *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 31–41.

[10] B. Li, A. N. Skiba, “New characterizations of finite supersoluble groups”, *Sci. China Ser. A*, **51**:5 (2008), 827–841.

[11] W. Guo, A. N. Skiba, “Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups”, *J. Algebra*, **321**:10 (2009), 2843–2860.

[12] S. Li, “Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups”, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **100A**:1 (2000), 65–71.

[13] W. Guo, H. V. Legchekova, A. N. Skiba, “The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups”, *Comm. Algebra*, **37**:7 (2009), 2446–2456.

[14] Го Вэньбинь, Е. В. Легчекова, А. Н. Скиба, “Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 350–359.

[15] A. N. Skiba, “Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups”, *Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины*, 2006, № 3(36), 12–31.

[16] В. Го, Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба, “О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:6 (2009), 1255–1268.

[17] Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба, “Строение конечных групп с S-квазинормальными третьими максимальными подгруппами”, *Укр. матем. журн.*, **61**:12 (2009), 1630–1639.

[18] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[19] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea Publ., New York, 1980.

[20] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962.

Ю. В. Луценко
Брянский государственный университет
им. акад. И. Г. Петровского
E-mail: lucenko_av@mail.ru

Поступило
28.09.2010

А. Н. Скиба
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: alexander.skiba49@gmail.com