Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 511 **МАТЕМАТИКА**

А. А. РУБАН

АЛГОРИТМ ПЕРРОНА ДЛЯ P-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 X 1971)

В работе для p-адических чисел приводится конструкция, являющаяся аналогом алгоритма Перрона для действительных чисел, т. е. приводится построение многомерных непрерывных p-адических дробей. Для построенного процесса доказывается сходимость, дается оценка скорости сходимости, дается оценка скорости роста представляющих элементов. В заключение приводится ряд теорем об эргодических свойствах многомерных непрерывных p-адических дробей.

Пусть p — некоторое простое число; через X обозначим множество p-адических чисел вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i p^i$, а через Y — множество чисел вида $\sum\limits_{i=-m}^{0} c_i p^i$. Если $y \in Y$, то будем называть y дробным p-адическим числом. Норму p-адического числа x будем обозначать через $|x|$, а не через $|x|_p$. Для произвольного p-адического числа $z = \sum\limits_{i=-m}^{\infty} c_i p^i$ число $\{z\} = \sum\limits_{i=-m}^{0} c_i p^i$ будем называть его дробной частью.

Теорема 1. *Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ — система p-адических чисел такая, что числа $x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ рационально независимы.*

Для каждого натурального k можно определить систему n дробных p-адических чисел $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k$ (разумеется, зависящих от выбранного x, так что правильнее было бы писать, например, $a_n^k(x)$) таких, что они удовлетворяют неравенствам $|a_n^k| \geqslant p$, $|a_n^k| > |a_i^k|$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и, кроме того, обладают следующим свойством. Положим, используя очевидные сокращения,

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & \ldots & r_{1,n+1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n+1,1} & \ldots & r_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1^i \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_2^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n^i \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & a_1^i \\ E & \vdots \\ & a_n^i \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} M_i(X),$$

где E — единичная матрица порядка n.

Тогда $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} r_{i,n+1}^k / r_{n+1,n+1}^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

В частности, при $n = 1$ r_{12}^k и r_{22}^k есть соответственно числитель и знаменатель k-й подходящей дроби p-адического числа x_1. Это вытекает из сопоставления описываемой ниже конструкции с разложением p-адического числа в цепную дробь, описанным в ([1]). Будем символически писать $x = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i(x)$.

Перейдем к построению дробных p-адических чисел a_i^k, $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим $x_0 = 1$, $x_i^0 = x_i$, $a_i^0 = \{x_i^0 / x_0^0\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Далее, положим

$x_0^0 = x_n^1$, $x_i^0 = x_{i-1}^1 + a_i^0 x_n^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отметим, что p-адические числа $x_0^1, x_1^1, \ldots, x_n^1$ рационально независимы. В самом деле, если целые рациональные числа $q_0, q_1, \ldots, q_n$ удовлетворяют условию

$$q_0 x_0^1 + q_1 x_1^1 + \ldots + q_n x_n^1 = 0,$$

то

$$q_0 (x_1^0 - a_1^0 x_0^0) + \ldots + q_{n-1} (x_n^0 - a_n^0 x_0^0) + q_n x_0^0 = 0,$$

$$\left(q_n - \sum_{i=0}^{n-1} q_i a_{i+1}^0\right) x_0^0 + q_0 x_1^0 + \ldots + q_{n-1} x_n^0 = 0.$$

откуда $q_0 = q_1 = \ldots = q_n = 0$.

Так как

$$\left|\frac{x_i^1}{x_n^1}\right| = \left|\frac{x_{i+1}^0 - a_{i+1}^0 x_0^0}{x_0^0}\right| < 1,$$

то

$$|x_1^i| < |x_n^1|, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Если теперь мы вместо p-адических чисел $x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ возьмем $x_0^1, x_1^1, \ldots, x_n^1$, то, применив тот же самый процесс, получим систему рационально независимых p-адических чисел $x_0^2, x_1^2, \ldots, x_n^2$. Как и на предыдущем шаге, здесь $a_i^1 = \{x_i^1 / x_0^1\}$, $x_0^1 = x_n^2$, $x_i^1 = x_{i-1}^2 + a_i^1 x_n^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $|x_i^2| < |x_n^2|$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Продолжая таким же образом дальше, будем иметь для каждого $k = 1, 2, \ldots$ систему рационально независимых чисел $x_0^k, x_1^k, \ldots, x_n^k$. Аналогично предыдущему, $x_0^k = x_n^{k+1}$, $x_i^k = x_{i-1}^{k+1} + a_i^k x_n^{k+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $a_i^k = \{x_i^k / x_0^k\}$, $|a_n^k| > |a_i^k|$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Иначе говоря,

$$\begin{pmatrix} x_0^k \\ x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1^k \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{k+1} \\ x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & a_1^k \\ E & a_2^k \\ & \vdots \\ & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{k+1} \\ x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $x_i = \sum_{j=1}^{n+1} r_{ij}^k x_{j-1}^{k+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $1 = x_0 = x_n' = \sum_{j=1}^{n+1} r_{n+1,\,j}^k x_{j-1}^{k+1}$, где коэффициенты r_{ij}^k определяются рекуррентным соотношением

$$\begin{pmatrix} r_{11}^k & \ldots & r_{1,\,n+1}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n+1,\,1}^k & \ldots & r_{n+1,\,n+1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{k-1} & \ldots & r_{1,\,n+1}^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n+1,\,1}^{k-1} & \ldots & r_{n+1,\,n+1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & a_1^k \\ E & \vdots \\ & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Анализируя строение этих матриц, немедленно усматриваем, что допустима запись $r_{ij}^k = A^{k+j-1}$, что заведомо $|A^{+i+k}| > 1$ при $k = 1, 2, \ldots$, а также что $|A_i^{n+k+1}| = |A_i^{n+k}| \cdot |a_n^{k+1}|$. При $n = 1$ это дает приведенную в ([1]) оценку снизу для скорости роста норм числителей и знаменателей подходящих дробей для всех $x \in X$:

$$|r_k(x)| \geqslant p^{k-1}, \quad |q_k(x)| \geqslant p^*.$$

Имеем

$$\left|\frac{A_i^{n+k+1}}{A_{n+1}^{n+k+1}}-\frac{A_i^{n+k}}{A_{n+1}^{n+k}}\right|=\frac{|A_i^{n+k+1}A_{n+1}^{n+k}-A_{n+k}^{n+k+1}A_i^{n+k}|}{|A_{n+1}^{n+k+1}|\cdot|A_{n+1}^{n+k}|}\leqslant\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k}|a_n^i|}\leqslant p^{-k},$$

так как выражение $A_i^{n+k+1}A_{n+1}^{n+k}-A_{n+1}^{n+k+1}A_i^{n+k}$ после приведения подобных членов не содержит слагаемых, в которые сомножителями входят $a_i^m a_j^m$ при некотором m.

Таким образом, получено не только доказательство сходимости описанного процесса, но и оценка скорости сходимости. Итак, существует предел $G_i=\lim\limits_{k\to\infty}(A_i^k/A_{n+1}^k)$, $i=1,\dots,n$. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем k_1 так, чтобы при $k>k_1$ выполнялось неравенство $|A_i^k/A_{n+1}^k-G_i|<\varepsilon$. Поскольку

$$x_i=\sum_{j=1}^{n+1}r_{ij}^k x_{j-1}^{k+1},$$

$$y_i-G_i|=\left|\frac{x_i}{x_0}-G_i\right|=\left|\sum_{j=1}^{n+1}(A_i^{k+j-1}-G_iA_{n+1}^{k+j-1})x_{j-1}^{k+1}\right|\Big/\left|\sum_{j=1}^{n+1}A_{n+1}^{k+j-1}x_{j-1}^{k+1}\right|<\varepsilon.$$

Описанная конструкция является аналогом алгоритма Перрона для действительных чисел ([2]).

Вычисления показывают, что справедлива

Теорема 2. *Если $y\in Y$, $|y|=p^m$, то для $k=1,2,\dots,n$ и любого натурального i*

$$p^{-2m}\leqslant P\{x\colon a_k^i(x)=y\}\leqslant p^{-m}.$$

Здесь через P обозначена мера Хаара на X^n, нормированная условием $P(X^n)=1$.

Соответствующий результат для действительного случая приведен в ([3]).

Определим преобразование T пространства X^n в себя: $T(x)=\prod\limits_{i=2}^{\infty}M_i(x)$.

Из результатов ([4]) вытекает, что на X^n существует мера μ, инвариантная относительно преобразования T, такая, что для любого измеримого множества $B\in X^n$ $C_1P(B)\leqslant\mu(B)\leqslant C_2P(B)$, $0<C_1\leqslant C_2<\infty$.

Теорема 3. *Преобразование T — точный эндоморфизм пространства X^n.*

Доказательство этой теоремы можно получить, в силу ([5]), из того сравнительно легко проверяемого в нашем случае факта, что если $\mu(B)>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^nB)=1$. Точность, как известно ([5]), влечет эргодичность и перемешивание всех степеней.

Как показывает непосредственный подсчет, $P\{x\colon a_n^1(x)=y,\ |y|=p^k\}=p^{-2k}$, поэтому, используя индивидуальную эргодическую теорему, получаем следующие результаты.

Теорема 4. *Существует некоторое действительное число C, $0<C<\infty$, такое, что для почти всех $x\in X^n$* $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{k}|a_n^i(x)|\right)^{1/k}=C.$

Теорема 5. *При $i=1,2,\dots,n+1$ для почти всех $x\in X^n$ $\lim\limits_{k\to\infty}|A_i^k(x)|^{1/k}=C$. Постоянная C здесь та же самая, что и в теореме 4.*

Теорема 6. *Для почти всех* $x\in X^n$ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}|a_n^i(x)|=\infty.$

Теорема 7. *Пусть* $y \in Y$, *а* $R(x, y)$ *означает относительную частоту (если она существует, разумеется), с которой выполняется равенство* $a_n^i(x) = y$.

Тогда для почти всех $x \in X^n$ $R(x, y)$ *принимает одно и то же значение.*

Автор пользуется возможностью выразить благодарность акад. Ю. В. Линнику, И. А. Ибрагимову, А. Г. Постникову, Г. П. Акилову, М. И. Гордину за полезные обсуждения.

Институт прикладной физики
Новосибирск

Поступило
8 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Рубан, Сибирск. матем. журн., 11, № 1, 222 (1970). [2] В. Ходж, Д. Пидо, Методы алгебраической геометрии, 3, ИЛ, 1955. [3] F. Schweiger, Monatsh. Math., 69, № 3, 243 (1965). [4] М. И. Гордин, ДАН, 196, № 6, 1255 (1971). [5] В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 4, 499 (1961).