

УДК 513.836

МАТЕМАТИКА

П. А. КУЧМЕНТ, А. А. ПАНКОВ

О КЛАССИФИЦИРУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ ГРУПП $K_G^{p,q}(X)$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XII 1971)

В настоящей заметке мы показываем, что описание классифицирующих пространств групп K^n в терминах фредгольмовых операторов, данное М. Каруби ⁽¹⁾, может быть распространено на эквивариантный случай (по крайней мере для конечной группы G). Как и М. Каруби, мы рассматриваем паракомпактный случай, однако наши доказательства когомологических свойств групп K_G^n даже для тривиальной группы G отличаются от доказательств в ⁽¹⁾.

1. Пусть $\mathcal{E}$ — предбанхова категория над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ в смысле ⁽²⁾. Это значит, что $\mathcal{E}$ аддитивна и группы $\text{Hom}(M, N)$ обладают структурой банаховых пространств над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, которые удовлетворяют естественным требованиям согласованности. Пусть G — компактная группа. Мы говорим, что $\mathcal{E}$ является предбанховой G -категорией, если для любого $M \in \text{Ob } \mathcal{E}$ задано представление ρ_M группы G в алгебре $\text{End } M$. Тогда для любых $M, N \in \text{Ob } \mathcal{E}$ $\text{Hom}(M, N)$ превращается в G -пространство с действием $\varphi(g) \cdot f = \rho_N(g)^{-1} f \rho_M(g)$.

Если X — паракомпактное G -пространство, то можно построить категорию $\mathcal{E}_G(X)$ G -расслоений над X с моделью из $\mathcal{E}$. Это делается следующим образом: пусть $\mathcal{E}_{T,G}(X)$ — категория, в которой $\text{Ob } \mathcal{E}_{T,G}(X) = \text{Ob } \mathcal{E}$, а морфизмами из M в N являются непрерывные G -отображения $f: X \rightarrow \text{Hom}(M, N)$. Эта категория аддитивна, но не является предбанховой. Присоединив к $\mathcal{E}_{T,G}(X)$ ядра проекторов (т. е. таких эндоморфизмов p , что $p^2 = p$), получаем ассоциированную псевдоабелеву категорию, которая обозначается $\mathcal{E}_G(X)$. Это и есть нужная нам категория расслоений. (Аддитивная категория называется псевдоабелевой, если в ней существуют ядра проекторов; предбанхова категория называется банаховой, если она псевдоабелева.) Заметим, что объекты $\mathcal{E}_G(X)$ — это пары (M, p) , где $M \in \text{Ob } \mathcal{E}_{T,G}(X) = \text{Ob } \mathcal{E}$, а p — проектор из $\text{End } \mathcal{E}_{T,G}(X)(M)$. Морфизмы из (M, p) в (N, p') — это такие морфизмы $f \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_{T,G}(X)}(M, N)$, что $p'f = fp$, профакторизованные по отношению эквивалентности $f \sim g \Leftrightarrow p'f = p'g$.

Введем теперь категорию $\hat{\mathcal{E}}_G(X)$, которая является банаховой. Объектами этой категории служат объекты из $\mathcal{E}_G(X)$, а морфизмами из $(M, p) = M_p$ в $(N, p') = N_{p'}$ — такие классы α морфизмов из $\text{Hom}_{\mathcal{E}_{T,G}(X)}(M, N)$, которые содержат морфизм f , удовлетворяющий условию $\sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty$.

Норма в $\text{Hom}_{\hat{\mathcal{E}}_G(X)}(M_p, N_{p'})$ задается равенством $\|\alpha\| = \inf_{f \in \alpha} \sup_{x \in X} \|f(x)\|$.

2. Пусть $C^{p,q}$ — алгебра Клиффорда квадратичной формы $\left(-\sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2\right)$ (определения, основные факты и вычисления см. в работах ⁽²⁻⁴⁾). Образующие этой алгебры обозначим $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p,$

$j = 1, \dots, q$. Если $\mathcal{C}$ — аддитивная категория, то обозначим через $\mathcal{C}^{p,q}$ категорию, объектами которой будут объекты из $\mathcal{C}$, на которых действует алгебра $C^{p,q}$, а морфизмами — $\mathcal{C}$ -морфизмы, совместимые с действием $C^{p,q}$.

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ — банаховы категории и $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — аддитивный функтор. Рассмотрим совокупность троек (E, η^1, η^2) , где $E \in \text{Ob } \mathcal{C}^{p,q}$, а η^1, η^2 — градуировки на E (инволютивные автоморфизмы, т. е. такие, что $(\eta^i)^2 = 1$, антикоммутирующие с образующими $C^{p,q}$), удовлетворяющие условию $\varphi(\eta^1) = \varphi(\eta^2)$. Тройка (E, η, η) называется элементарной. Тройки (E, η^1, η^2) и (F, ξ^1, ξ^2) эквивалентны, если найдется элементарная тройка (N, η, η) такая, что $\eta^1 \oplus \xi^2 \oplus \eta$ гомотопна $\eta^2 \oplus \xi^1 \oplus \eta$ в классе градуировок на $E \oplus F \oplus N$. Факторизуя совокупность таких троек по введенному отношению эквивалентности, получаем абелеву группу, которая обозначается $K^{p,q}(\varphi)$. Известно ^(1,2), что $K^{p,q}(\varphi)$ зависит только от $p - q$. Положим $K^n(\varphi) = K^{p,q}(\varphi)$, $n = p - q$. Если $\mathcal{C}' = \{0\}$, то мы пишем $K^{p,q}(\mathcal{C})$.

Приведенные выше построения применимы не только к банаховым категориям. Так, например, они проходят в случае категории $\mathcal{C}_G(X)$. В дальнейшем мы будем писать $\hat{K}_G^{p,q}(X; \mathcal{C})$ вместо $K^{p,q}(\mathcal{C}_G(X))$ и $\hat{K}_G^{p,q}(X; \mathcal{C})$ вместо $\hat{K}^{p,q}(\mathcal{C}_G(X))$. Заметим, что имеется гомоморфизм $i^{p,q}: \hat{K}_G^{p,q}(X; \mathcal{C}) \rightarrow K_G^{p,q}(X; \mathcal{C})$, естественный относительно G -отображений базы X .

3. Пусть теперь H — сепарабельное гильбертово пространство, в котором задано действие группы G унитарными операторами, причем каждое неприводимое представление группы G встречается в H бесконечное число раз. В качестве H можно взять, например, бесконечную ортогональную сумму $(L_2(G) \oplus L_2(G) \oplus \dots)$, где предполагается, что в $L_2(G)$ рассматривается регулярное представление группы G (см. ⁽³⁾). Обозначим через $\mathcal{H}$ предбанахову G -категорию, объекты которой имеют вид H^n , $n = 0, 1, \dots$. Определим предбанахову G -категорию $\mathcal{H}^\sim$ следующим образом: $\text{Ob } \mathcal{H}^\sim = \text{Ob } \mathcal{H}$ и $\text{Hom}_{\mathcal{H}^\sim}(E, F) = \text{Hom}_{\mathcal{H}}(E, F) / \mathcal{H}(E, F)$, где $\mathcal{H}(E, F)$ — пространство компактных операторов. Справедливо следующее утверждение (ср. ⁽¹⁾).

Предложение 1. Если X — компактное G -пространство, то

$$K_G^n(X) \simeq K_G^{n-1}(X; \mathcal{H}^\sim).$$

Здесь $K_G^n(X)$ — обычный функтор Атья — Сегала ⁽⁷⁾.

В отличие от ⁽¹⁾, мы даем элементарное доказательство этого факта, не использующее технику точных последовательностей категорий ⁽⁸⁾. При этом определенной трудностью является доказательство функториальности указанного изоморфизма. Эта трудность автоматически снимается при использовании точных последовательностей.

Введение группы $\hat{K}^{p,q}$ оправдывается следующим результатом.

Предложение 2. Для паракомпактного G -пространства X канонический гомоморфизм $i^{p,q}: \hat{K}^{p,q}(X; \mathcal{H}^\sim) \rightarrow K_G^{p,q}(X; \mathcal{H}^\sim)$ является изоморфизмом.

Эта теорема доказывается с использованием хорошо известного полярного разложения оператора.

Из предложения 2 и общих результатов ⁽²⁾ о когомологиях банаховых категорий получаем

Следствие 1. Для любого паракомпактного G -пространства X существует изоморфизм $t: K_G^{p,q+1}(X; \mathcal{H}^\sim) \rightarrow K_G^{p,q}(X \times D^1, X \times S^0, \mathcal{H}^\sim)$. Здесь D^n — единичный шар, а S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $K_G^{p,q}(X, Y; \mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} K^{p,q}(\psi)$, где $\psi: \mathcal{C}_G(X) \rightarrow \mathcal{C}_G(Y)$ — функтор сужения.

Следствие 2. Существует точная когомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow K_G^{n-1}(X; \mathcal{H}^\sim) \rightarrow K_G^{n-1}(Y; \mathcal{H}^\sim) \xrightarrow{\partial^*} K_G^n(X, Y; \mathcal{H}^\sim) \rightarrow K_G^n(X; \mathcal{H}^\sim) \rightarrow \dots$$

Следствия 1, 2 показывают, что построенная K_G -теория обладает всеми свойствами обычной K_G -теории ⁽⁷⁾.

Пусть теперь $A = \text{End } H / \mathcal{K}(H)$. Тогда A является G -модулем. Пусть $\mathcal{L}(A)$ — категория свободных A -модулей конечного типа. Тогда $\mathcal{L}(A)$ является предбаначевой категорией. Как и в ⁽¹⁾,

$$K_G^{p,q}(X; \mathcal{H}^\sim) \simeq K_G^{p,q}(X; \mathcal{L}(A)) \stackrel{\text{def}}{=} K_G^{p,q}(X; A).$$

4. Начиная с этого места, считаем, что G — конечная группа.

Пусть H — пространство описанного выше представления группы G . Рассмотрим тензорное произведение $H^{p,q} = C^{p,q+2} \otimes H$, на котором действие G определяется естественным образом. Через $\mathcal{F}^{p,q}$ обозначим множество фредгольмовых операторов T в $H^{p,q}$ (т. е. нормально разрешимых операторов с конечномерными ядром и коядром ⁽⁸⁾), удовлетворяющих условиям:

$$\text{а) } T^* = T,$$

$$\text{б) } T e_i = e_i T, T e_j = -e_j T, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q+1.$$

Нетрудно заметить, что $e_{q+2} \in \mathcal{F}^{p,q}$. Через $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ обозначается связная компонента e_{q+2} в $\mathcal{F}^{p,q}$. Легко видеть, что $\mathcal{F}^{p,q}$ и $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ инвариантны относительно действия G , т. е. являются G -пространствами. Эти множества снабжаются равномерной операторной топологией. Пусть $k^{p,q}$ — дискретная группа K^{p-q} (точка) (здесь K^n — обычный функтор Атья ⁽⁷⁾). Будем считать, что группа G действует на $k^{p,q}$ тривиальным образом.

Пусть теперь X — паракомпактное G -пространство. Через $[X, k^{p,q} \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}]_G$ обозначим множество гомотопических классов G -отображений из X в $k^{p,q} \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$. На этом множестве можно определить сложение, индуцированное прямой суммой операторов из $\tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ и сложением в $k^{p,q}$, превращающее его в абелеву группу.

Теорема 1. G -пространство $k^{p,q} \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}$ является классифицирующим пространством для функтора $K_G^{p,q+1}(\cdot; \mathcal{H}^\sim)$, т. е. имеет место изоморфизм групп

$$[X, k^{p,q} \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}]_G \simeq K_G^{p,q+1}(X; \mathcal{H}^\sim).$$

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает

Следствие 3. В случае компактного X имеет место изоморфизм групп

$$[X, k^{p,q} \times \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}]_G \simeq K_G^{p-q}(X).$$

Как и в работе ⁽¹⁾, из теоремы 5 с использованием периодичности Ботта ^(2,7) можно получить следующие результаты.

Теорема 2. Имеется естественный изоморфизм

$$KU_G^n(X) \simeq [X, \mathcal{F}U^n]_G,$$

где $\mathcal{F}U^n$ обозначает подмножество множества $\mathcal{F}(H)$ фредгольмовых операторов, образованное $\mathbb{C}$ -линейными операторами T , удовлетворяющими следующим условиям:

1) при $n \equiv 0 \pmod{2}$ без условий;

2) при $n \equiv 1 \pmod{2}$ T самосопряжен ($T^* = T$) и существенный спектр T расположен на обе стороны от мнимой оси.

Теорема 3. Имеется естественный изоморфизм

$$KO_G^n(X) \simeq [X, \mathcal{F}O^n]_G,$$

где $\mathcal{F}O^n$ обозначает подмножество $\mathcal{F}(H)$, образованное $\mathbb{R}$ -линейными операторами (H предполагается вещественным пространством), удовлетворяю-

щим условиям:

- 1) при $n \equiv 0 \pmod{8}$ без условий;
- 2) при $n \equiv 1 \pmod{8}$ T самосопряжен и существенный спектр расположен по обе стороны от мнимой оси;
- 3) при $n \equiv 2 \pmod{8}$ H снабжено комплексной структурой, в которой T антилинеен;
- 4) при $n \equiv 3 \pmod{8}$ H снабжено кватернионной структурой. T кососимметричен ($T^* = -T$) и согласован с этой структурой;
- 5) при $n \equiv 4 \pmod{8}$ H снабжено кватернионной структурой и T согласован с этой структурой;
- 6) при $n \equiv 5 \pmod{8}$ H снабжено кватернионной структурой. T самосопряжен и согласован с этой структурой, а существенный спектр T лежит по обе стороны от мнимой оси;
- 7) при $n \equiv 6 \pmod{8}$ H снабжено комплексной структурой, T кососимметричен и антилинеен;
- 8) при $n \equiv 7 \pmod{8}$ T кососимметричен.

Замечание 1. Сопряженный T^* к оператору T берется в смысле подчиненной вещественной метрики. Ввести на H комплексную или кватернионную структуру здесь означает рассмотреть вместо H пространство $H \otimes \mathbb{C}$ или $H \otimes \mathbb{H}$ соответственно, а вместо $\mathcal{F}(H)$ — множество $\mathbb{R}$ -линейных фредгольмовых операторов в этих пространствах.

Замечание 2. При $n = 0$ утверждения теорем 2 и 3 имеют место и в случае произвольной компактной группы G . В общем случае трудность заключается в доказательстве следующего утверждения:

Пусть $j: \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H \oplus H)$ — отображение, действующее по формуле $j: T \rightarrow T \oplus \varepsilon_{q+2}$.

Тогда индуцированное отображение

$$j_*: [X, \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H)]_G \rightarrow [X, \tilde{\mathcal{F}}^{p,q}(H \oplus H)]_G$$

является изоморфизмом.

Это утверждение авторам удается доказать только в случае конечной группы с использованием некоторых результатов и конструкций работ ⁽⁹⁾ и ⁽¹⁰⁾.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. Г. Крейну за постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
11 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Каруби, Trans. Am. Math. Soc., 147, № 1, 75 (1970). ² М. Каруби, Ann. Sci. Ecole Norm. Suppl., 4, 1, 161 (1968). ³ Д. Хьюзмоллер, Расслоенные пространства, М., 1970. ⁴ М. Ф. Атиyah, R. Bott, A. Shapiro, Topology 3 (Suppl. I), 3 (1970). ⁵ М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., 1968. ⁶ М. Каруби, C. R., 267, № 10, A345 (1968). ⁷ М. Ф. Атья, Лекции по K-теории, М., 1967. ⁸ С. Г. Крейн, Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971. ⁹ G. E. Bredon, Equivariant Cohomology Theories, Berlin, 1967. ¹⁰ J. Milnor, Trans. Am. Math. Soc., 90, 272 (1959).