

А. А. НОВРУЗОВ

**О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 XII 1971)

1°. Рассмотрим следующие уравнения:

$$а) \mathcal{E}u = a^{ik}(x, u) u_{x_i x_k} + b(x, u, \nabla u) = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 \mu(\xi) |\alpha|^2 \leq a^{ik}(x, \xi) \alpha_i \alpha_k \leq \lambda_2 \mu(\xi) |\alpha|^2; \quad (2)$$

$$|b(x, \xi, \eta)| \leq C_1 |\eta|^2 + C_2, \quad \int_0^{\xi_0} \mu^{-1}(t) dt < +\infty, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ — положительные константы, а $\mu(t)$ — положительная функция на $(0, \xi_0)$;

$$б) \mathcal{E}'u = b^{ik}(x) u_{x_i x_k} + b(x, u, \nabla u) = 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\lambda_3 |\alpha|^2 \leq b^{ik}(x) \alpha_i \alpha_k \leq \lambda_4 |\alpha|^2; \quad (5)$$

$$|b^{ik}(x) - b^{ik}(y)| \leq \varphi(|x - y|), \quad \int_0^{\xi_0} \varphi(r) r^{-1} dr < +\infty; \quad (6)$$

$$|b(x, \xi, \eta)| \leq b_0(\xi) |\eta|^2 + C_3, \quad \int_0^{\xi_0} b_0(\xi) d\xi < +\infty; \quad (7)$$

$$|b| + |b_{x_i}| + |b_{x_i}| + (1 + |\eta|) |b_{x_i}| \leq C_4 (1 + |\eta|^2), \quad (8)$$

где $C_3 > 0, C_4 > 0$ — константы, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $b_0(\xi)$ — положительная функция на $(0, \xi_0)$.

Введем следующие обозначения: R^n — n -мерное евклидово пространство, D — область пространства R^n (ограниченная или неограниченная), FD — ее граница; CD — дополнение области D ; $Q_{\rho}^{x^0}$ — открытый шар радиуса ρ с центром в точке x^0 , а $S_{\rho}^{x^0}$ — его граница; $\Omega_{\rho_1, \rho_2}^{x^0}$ — шаровой слой между сферами $S_{\rho_1}^{x^0}$ и $S_{\rho_2}^{x^0}$; $H_{\rho_1, \rho_2}^{x^0} = CD \cap \Omega_{\rho_1, \rho_2}^{x^0}$, $r_m = 2^m$, где m — любое натуральное число; $C_s(E)$ — s -емкость множества E (см. (1)).

Пусть $u(x)$ — решение уравнения 1) и $L = A^{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$, $L' = b^{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$, где $A^{ik}(x) = a^{ik}(x, u(x)) \setminus \mu(u(x))$, а $b^{ik}(x)$ те же самые, что и в уравнении (4). Тогда

$$\lambda_1 |\alpha|^2 \leq A^{ik}(x) \alpha_i \alpha_k \leq \lambda_2 |\alpha|^2, \quad \lambda_3 |\alpha|^2 \leq b^{ik}(x) \alpha_i \alpha_k \leq \lambda_4 |\alpha|^2. \quad (9)$$

Определение 1. Пусть $D \subset R^n$ — ограниченная область и $x^0 \in FD$. Назовем точку $x^0 \in FD$ λ_1, λ_2 -регулярной точкой, если выполнены следующие условия: для каждой пары $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были область $D' \subset D$ с границей FD' , равномерно эллиптический оператор L , определенный на D' с константами λ_1, λ_2 неравенства (9), и субэллиптический, для него функции $u(x) < 1$, непрерывная в $\bar{D}'$; из того, что $u|_{FD' \cap Q_{\varepsilon_1}^{x^0}} \leq 0$ следует, что $u|_{D' \cap Q_{\varepsilon_2}^{x^0}} \leq \varepsilon_2$.

Определение 2. Пусть имеется класс Λ операторов вида L' , определяемый константами λ_3, λ_4 неравенства (9) и функцией φ неравенства (6). Точка $x^0 \in FD$ называется равномерно регулярной для задачи Дирихле относительно этого класса Λ операторов в области D , если существует положительная функция $\omega(r)$, $0 < r < r_0$, стремящаяся к нулю при $r \rightarrow 0$, такая, что, каковы бы ни были окрестность σ точки x^0 , область $D' \subset D$ с границей FD' , оператор $L' \in \Lambda$ в D' , субрешение $u(x) < 1$ для оператора L' , непрерывное на $D' \cup FD'$ и неположительное на пересечении $FD' \cap \sigma$, имеет место неравенство $u(x) < \omega|x - x^0|$ при $x \in D' \cap \sigma'$, где σ' — окрестность точки x^0 , зависящая от σ и **н**е зависящая от D', L' и $u(x)$.

Определение 3. Пусть в ограниченной области $D \subset R^n$ дана задача Дирихле $L'u = 0$ в D и $u = \psi$ на FD , где ψ — непрерывная функция на FD . Пусть для любой непрерывной ψ обобщенное решение задачи Дирихле в смысле Винера (см. (*)) существует. Обозначим его u_ψ . Тогда точка $x^0 \in FD$ называется регулярной относительно задачи Дирихле, если имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x^0} u(x) = \psi(x^0)$.

Теорема 1. Пусть в ограниченной области $D \subset R^n$ дано уравнение (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) и (3). Пусть $x^0 \in FD$ и $C_s(Q_{4-m}^{x^0} \cdot CD) = \gamma_m$.

Для того чтобы точка $x^0 \in FD$ была λ_1, λ_2 -регулярной, достаточно, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} 4^m \gamma_m$ расходился, где s — положительное число, зависящее только от λ_1, λ_2 и n .

Теорема 2. Пусть в D определено уравнение (1) и выполняются условия (2) и (3). Если точки x^0 границы области D можно коснуться вершиной конуса, лежащего вне D , то точка x^0 будет λ_1, λ_2 -регулярной.

Теорема 3. Пусть $x^0 \in FD$ и относительно уравнения (1) в области D выполнены условия (2) и (3). Пусть область D такова, что можно ввести ортогональную систему координат $y_1, y_2, \dots, y_n$ с началом в точке x^0 такую, что для некоторого $h > 0$ множество точек

$$B = \left\{ y: \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right)^{1/2} < y_n |\ln y_n|^{-1/(l-3)}, \quad 0 < y_n < h \right\},$$

где $l = \sup_{\substack{x \in D \\ |z|=1}} A^{ii}(x) \setminus A^{ih}(x) \xi_i \xi_h \geq n \geq 4$, принадлежит дополнению области D .

Тогда точка x^0 является λ_1, λ_2 -регулярной.

Теорема 4. Пусть в неограниченной области D дано уравнение (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2), (3) и $C_2 = 0$. Пусть решение $u(x)$ уравнения (1) положительно внутри D и обращается в нуль на границе этой области. Пусть $R > 0$ — некоторое достаточно большое число.

Тогда для любого положительного решения уравнения (1) имеет место неравенство

$$\sup_{|x| \geq R} u(x) \cdot \exp \left(K_0 \int_0^{\sup_{|x| \geq R} u(x)} \mu(t) dt \right) \geq M \exp \left[K_1 \sum_{m=1}^{[\ln R]} \frac{C_s(H_{r_m}, r_{m+1})}{r_m^s} \right],$$

где $M = \sup_{|x|=r} u(x)$, $r < R$, s имеет тот же смысл, что и в теореме 2, а $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ — константы, зависящие только от λ_1, λ_2 и n .

Теорема 5. Пусть в ограниченной области $D \subset R^n$ дано уравнение (4) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5), (6) и (7). Пусть точка $x^0 \in FD$ и $C_{n-2}(Q_{4-m}^{x^0} \cdot CD) = \beta_m$.

Для того чтобы точка $x^0 \in FD$ была равномерно регулярной, достаточно, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} 4^{(n-2)} \gamma_m$ расходился, а в случае, когда выполняется условие (8), то это условие является и необходимым, следовательно, точка $x^0 \in FD$ будет регулярной в смысле определения 3.

Теорема 6. Пусть в неограниченной области D дано уравнение (4) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5), (6), (7) и $C_3 = 0$. Пусть решение $u(x)$ уравнения (4) положительно внутри D и обращается в нуль на FD . Пусть $R > 0$ — некоторое достаточно большое число.

Тогда для любого положительного решения уравнения (4) имеет место неравенство

$$\sup_{|x| \geq R} u(x) \cdot \exp \left(K_2 \int_0^{\sup_{|x| \geq R} u(x)} b_0^{-1}(t) dt \right) \geq M \exp \left[K_3 \sum_{m=1}^{[\ln R]} \frac{C_{n-2}(H_{r_m}^{x^0}, r_{m+1})}{r_m^{n-2}} \right],$$

где $M = \sup_{|x|=r} u(x)$, $r < R$; $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ — константы, зависящие только от λ_3 , λ_4 , n и от функции φ неравенства (7).

Теорема 7. Пусть уравнение (4) дано во всем пространстве R^n и выполняются условия (5), (6), (7) и $C_3 = 0$, $b_0(\xi) \equiv 1$. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (4), также определенное в R^n . Пусть E^+ (E^-) — множество точек $x \in R^n$, где $u(x) > 0$ ($u(x) < 0$) и общее число компонент множеств E^+ и E^- не меньше N .

Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{\ln r} \geq l_1$, где $M(r) = \max_{|x|=r} |u(x)|$ и $l_1 > 0$ — константа, зависящая от λ_3 , λ_4 , N .

Отметим, что в доказательстве всех этих теорем используется та или иная форма леммы о возрастании положительных решений уравнений (1) и (4) аналогично линейному случаю (см. (1)).

Теорема 8. Пусть коэффициенты оператора $\mathcal{E}'$ удовлетворяют условиям (5), (6), (7) и $C_3 = 0$. Пусть $u(x)$ — отличная от постоянной функция, удовлетворяющая неравенству $\mathcal{E}'u \geq 0$ в сфере S_R^0 с выколотым центром и $M_R = \max_{|x|=R} u(x)$.

Тогда, если при $|x| \rightarrow 0$

$$u = \begin{cases} o(\ln \ln |x|), & n = 2, \\ o(\ln |x|), & n > 2, \end{cases}$$

то $u(x) < M_R$ при $0 < |x| < R$ и, более того, $\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x) < M_R$.

Теорема 9 (неравенство Гарнака). Пусть $u(x)$ — положительное решение уравнения (4) внутри Q_R^0 и в Q_R^0 выполняются условия (5), (6), (7) и $C_3 = 0$.

Тогда существует константа $d > 0$, зависящая только от λ_3 , λ_4 , n , функции $b_0(\xi)$ неравенства (3) и от $\int_0^{2R} \varphi(t) t^{-1} dt$, такая, что при $0 \leq |x| \leq \frac{1}{3}R$ выполняется неравенство

$$d^{-1}u(0) \leq u(x) \leq du(0).$$

Теорема 10 (Ливуилля). Пусть эллиптический оператор вида (4) определен во всем пространстве R^n и выполняются условия (5), (6), (7) и $C_3 = 0$. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (4), ограниченное во всем пространстве R^n .

Тогда $u(x) \equiv \text{const}$.

2°. Рассмотрим уравнение

$$g(r) a^{ik}(x) u_{x_i x_k} + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0; \quad (10)$$

относительно коэффициентов уравнения (10) будем предполагать, что все функции $a^{ik}(x)$ удовлетворяют условию Дини (равномерно). $b_i(x)$ и $c(x)$ ограниченные и кроме того выполняются неравенства

$$a_0 |\alpha|^2 \leq a^{ik}(x) \alpha_i \alpha_k \leq a_1 |\alpha|^2, \quad \int_0^r g^{-1}(t) dt < \infty,$$

где $g(t)$ — монотонно неубывающая положительная функция на $(0, t_0)$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ — константы, а r — расстояние от любой точки области D до ее границы.

Теорема 11. Пусть точка x^0 принадлежит границе ограниченной области D . Пусть в D определено уравнение (10) и

$$C_{n-2}(\Omega_{2^{-m}(1-q), 2^{-m}(1+q)}^{x^0} \cap CD) = C_m, \quad \text{где } 0 < q < 1.$$

Для того чтобы точка $x^0 \in FD$ была регулярной в смысле определения 2, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{(n-2)m} C_m$ расходился.

Теорема 12. Пусть $x^0 \in FD$ и ограниченная область D обладает тем свойством, что если ввести ортогональную систему координат $y_1, y_2, \dots, y_n$ с началом в точке x^0 , то точки, принадлежащие воронке

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right)^{1/2} < y_n |\ln y_n|^{-1/(n-3)}, \quad 0 < y_n < h,$$

при каком-либо h , $0 < h < 1$, не принадлежат области D ($n \geq 4$).

Тогда точка $x^0 \in FD$ будет регулярной для уравнения (10).

Рассмотрим уравнение

$$f(r)(a^{ik}(x)u_{x_i x_k} + b^i(x)u_{x_i} + C(x)u = 0; \quad (11)$$

коэффициенты уравнения (11) удовлетворяют условиям: функции $a^{ik}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ ограниченные и измеримые, кроме того выполняются неравенства

$$a_2 |\alpha|^2 \leq a^{ik}(x) \alpha_i \alpha_k \leq a_3 |\alpha|^2, \quad \int_0^r f^{-1}(t) dt < \infty,$$

где $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ — константы, $f(t)$ — неубывающая положительная функция на $(0, t_0)$, а r — расстояние от любой точки области D до ее границы. Под решением уравнения (11) понимается слабое решение в смысле работы (3). Для решения $u(x)$ уравнения (11) справедливы теоремы 11 и 12.

Вопросу регулярности граничных точек и другим качественным вопросам для квазилинейных уравнений был посвящен ряд работ ((5, 6) и др.). В них рассматривались уравнения в дивергентном виде. Что касается квазилинейных уравнений в недивергентном виде, то укажем, что теоремы 1, 2 и 3 в частном случае независимо получены А. А. Космодемьянским (в печати).

Выражаю искреннюю признательность проф. Е. М. Ландису за полезные советы при обсуждении этой работы.

Азербайджанский государственный
университет им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
12 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. М. Ландис, Уравнения 2-го порядка эллиптического и параболического типов, «Наука», 1971. ² Дж. Серрин, Сборн. пер. Математика, 2, 6 (1958). ³ W. Littman, G. Sparracchia, H. F. Weinberger, Univ. of Minnesota, 1962. ⁴ М. В. Келдыш, УМН, 8 (1941). ⁵ В. Г. Мазья, Вестн. Ленингр. ун-ва, матем., № 3 (1970). ⁶ Л. П. Купцов, Матем. заметки, 8, № 5 (1970).