

А. В. ШТРАУС

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 18 X 1971)

1. Пусть A — замкнутый симметрический несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathcal{D}_A$, необязательно плотной в H , Γ — его поле регулярности. Оператор A называется регулярным ⁽¹⁾, если вся вещественная ось содержится в Γ^* . В настоящей работе описывается совокупность всех спектральных разложений регулярного оператора A . В более общем случае, когда Γ имеет непустое пересечение с вещественной осью, получена формула, выражающая значения произвольной спектральной функции оператора A на отрезках, содержащихся в Γ . Один из результатов работы, полученный без каких-либо предположений относительно Γ , дополняет ранее установленную формулу обобщенных резольвент произвольного симметрического оператора.

2. При любом комплексном λ положим $\mathcal{M}_\lambda = (A - \lambda I)\mathcal{D}_A$, $\mathcal{N}_\lambda = H \ominus \mathcal{M}_\lambda$; если $\lambda \in \Gamma$, то $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda$. Как известно ⁽²⁾, при любом не вещественном λ $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{N}_\lambda$ линейно независимы и $\mathcal{D}_A \dot{+} \mathcal{N}_\lambda = H$.

Пусть λ_0 — произвольное фиксированное не вещественное число, $\tau_0 = \text{Im } \lambda_0$. Положим $\mathcal{R} = \mathcal{N}_{\lambda_0}$. Определим оператор $B \supset A$ следующим образом: $\mathcal{D}_B = \mathcal{D}_A \dot{+} \mathcal{R}$, $B(f + \varphi) = Af + \lambda_0 \varphi$, $f \in \mathcal{D}_A$, $\varphi \in \mathcal{R}$. При $\tau_0 < 0$ (> 0) B (соответственно $-B$) является замкнутым максимальным диссипативным оператором ⁽³⁾. Пусть Π — полуплоскость, верхняя или нижняя, содержащая λ_0 , а ρ — резольвентное множество оператора B . Тогда $\Pi \subset \rho \subset \Gamma$.

Лемма 1. При любом $\lambda \in \rho$ пространство H представимо в виде прямой суммы $H = \mathcal{M}_\lambda \dot{+} \mathcal{R}$; для оператора проектирования $P(\lambda): H \rightarrow \mathcal{R}$, соответствующего этому разложению, имеет место формула

$$P(\lambda) = \frac{\lambda - \bar{\lambda}_0}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0} P_{\mathcal{R}}(B - \lambda_0 I)(B - \lambda I)^{-1}, \quad (1)$$

где $P_{\mathcal{R}}$ — ортопроектор на $\mathcal{R}^{**}$.

Согласно (1), операторнозначная функция $P(\lambda)$ аналитична в каждой связной компоненте множества ρ .

Заметим, что при любом вещественном λ $\mathcal{M}_\lambda$ и $\mathcal{R}$ линейно независимы и $H \ominus \mathcal{M}_\lambda \dot{+} \mathcal{R} = \{f \in \mathcal{D}_A: Af = \lambda f\}$.

Лемма 2. Если оператор A ограничен, то оператор B тоже ограничен, причем

$$\|B\| \leq \frac{1}{4|\tau_0|} (\|A\| + |\lambda_0| + \sqrt{(\|A\| + |\lambda_0|)^2 + 4|\tau_0|\|A\|})^2.$$

Следствие. Если оператор A ограничен, то $\mathcal{D}_A \dot{+} \mathcal{R} = H$.

Следующее предложение, в котором оператор A не предполагается ограниченным, вытекает из леммы 2, примененной к оператору $(A - \lambda I)^{-1}$.

Лемма 3. Если $\text{Im } \lambda = 0$ и $\lambda \in \Gamma$, то $\lambda \in \rho^{***}$.

* В отличие от ⁽¹⁾ здесь оператор A не предполагается плотно заданным, а его дефектное число — конечным.

** В ⁽³⁾ это предложение доказано для $\lambda \in \Pi$, однако проведенное там рассуждение остается в силе для любого $\lambda \in \rho$.

*** Эта лемма совпадает по существу с одним результатом Ю. Л. Шмульяна (⁽⁴⁾, лемма 3), относящимся к теории, расширения изометрических операторов.

Положим $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'_{\lambda_0}$, $K(\lambda) = P(\lambda)|\mathfrak{N}'$, $\lambda \in \rho$. Напомним, что при любом $\lambda \in \Pi$ $\|K(\lambda)\| \leq 1$, а операторнозначная функция $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} K(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, есть характеристическая функция оператора A ^(5, 3). Отметим, что при любом вещественном $\lambda \in \Gamma$ $K(\lambda)$ изометрически отображает $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{N}^*$. Если $\lambda \in \rho$ и $\bar{\lambda} \in \rho$, то $K^*(\bar{\lambda})K(\lambda) = I_{\mathfrak{N}'}$ и $K(\lambda)K^*(\bar{\lambda}) = I_{\mathfrak{N}'}$ ($I_{\mathfrak{N}'}$ — единичный оператор в $\mathfrak{N}$).

3. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ всех аналитических в полуплоскости Π операторных функций $F(\lambda)$, значениями которых являются нерастягивающие операторы, отображающие $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$. Пусть $\mathcal{E}_0$ — совокупность всех тех $F(\lambda) \in \mathcal{E}$, которые удовлетворяют условию: если $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda)\psi = \varphi$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [|\lambda|(\|\varphi\| - \|F(\lambda)\psi\|)] < \infty$, $\lambda \in \Pi$, $\varepsilon < |\arg \lambda| < \pi - \varepsilon$, и при этом $\varphi - \psi \in \mathcal{D}_A$, то $\psi = 0$. Для плотно заданного A указанное условие тривиально, так что в этом частном случае $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Согласно ⁽⁶⁾, формула

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \Pi,$$

с учетом равенства $R_\lambda^- = R_\lambda^*$ задает взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех обобщенных резольвент R_λ , $\text{Im } \lambda \neq 0$, оператора A и совокупностью $\mathcal{E}_0$ функций $F(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$; здесь $A_{F(\lambda)}$ при любом $\lambda \in \Pi$ есть расширение оператора A , определяемое оператором $F(\lambda)$ аналогично известной формуле Неймана.

Обобщенной $\mathfrak{N}$ -резольвентой оператора A будем называть операторнозначную функцию $R_{\lambda, \mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{N}} R_\lambda|_{\mathfrak{N}}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, где R_λ — произвольная обобщенная резольвента оператора A . Очевидно, что $R_{\bar{\lambda}, \mathfrak{N}} = R_{\lambda, \mathfrak{N}}^*$.

Произвольному нерастягивающему оператору V в $\mathfrak{N}$ ($\mathcal{D}_V = \mathfrak{N}$), не имеющему ненулевых неподвижных элементов, поставим в соответствие его дробно-линейное преобразование

$$T_V = (\lambda_0 V - \bar{\lambda}_0 I)(V - I)^{-1}.$$

При $\tau_0 < 0$ (> 0) T_V (соответственно $-T_V$) является замкнутым максимальным диссипативным оператором в $\mathfrak{N}$; V есть преобразование Кэли для T_V .

Отметим, что для произвольной функции $F(\lambda) \in \mathcal{E}_0$ при любом $\lambda \in \Pi$ оператор $K(\lambda)F(\lambda)$ не имеет ненулевых неподвижных элементов.

Теорема 1. Формула

$$\begin{aligned} R_{\lambda, \mathfrak{N}} &= [K(\lambda)F(\lambda) - I][(\lambda_0 - \lambda)K(\lambda)F(\lambda) - (\bar{\lambda}_0 - \lambda)I]^{-1} = \\ &= (T_{K(\lambda)F(\lambda)} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \Pi, \end{aligned} \quad (2)$$

определяет взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех обобщенных $\mathfrak{N}$ -резольвент $R_{\lambda, \mathfrak{N}}$ оператора A и совокупностью $K\mathcal{E}_0$ всех функций $K(\lambda)F(\lambda)$, $F(\lambda) \in \mathcal{E}_0$ **.

З а м е ч а н и е. Формула (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех обобщенных $\mathfrak{N}$ -резольвент оператора A и совокупностью $\mathcal{E}_0$ функций $F(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $K(\lambda)$ удовлетворяет условию: для любой аналитической и ограниченной функции $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, со значениями из $\mathfrak{N}'$, не равной тождественно нулю, $K(\lambda)\varphi(\lambda)$ тоже не обращается тождественно в нуль. Для выполнения этого условия достаточно, а если $\dim \mathfrak{N}' < \infty$, то и необходимо, чтобы при некотором $\lambda \in \Pi$ оператор $K(\lambda)$ обладал левым обратным.

* Это предположение содержится в теореме 8 из ⁽⁴⁾. При излагаемой нами трактовке операторной функции $K(\lambda)$ указанное предположение следует из сформулированных выше лемм 1, 3 и леммы 3.1 работы ⁽³⁾.

** Иное описание совокупности обобщенных $\mathfrak{N}$ -резольвент вытекает из одной теоремы М. Г. Крейна и Ш. Н. Саакяна (⁽⁷⁾, теоремы 4) в том случае, когда оператор A плотно задан и существует $\lambda \in \Pi$ такое, что $\bar{\lambda} \in \rho$; при этом следует учесть лемму 1.

4. Пусть E_t , $-\infty < t < \infty$, — произвольная спектральная функция оператора A ^(8, 9) *. Операторнозначную функцию $S(t) = P_{\mathfrak{R}} E_t|_{\mathfrak{R}}$, $-\infty < t < \infty$, будем называть $\mathfrak{R}$ -спектральной функцией оператора A (ср. ⁽⁷⁾). Соответствующая обобщенная $\mathfrak{R}$ -резольвента $R_{\lambda, \mathfrak{R}}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, оператора A связана с $S(t)$ равенством

$$R_{\lambda, \mathfrak{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dS(t)}{t - \lambda}.$$

Теорема 1 в сочетании с формулой обращения Стильтьеса дает описание совокупности всех $\mathfrak{R}$ -спектральных функций оператора A .

Предположим, что Γ имеет непустое пересечение с вещественной осью.

Теорема 2. Если $[\alpha, \beta] \subset \Gamma$, то

$$E_{\beta} - E_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} P^*(\lambda) dS(\lambda) P(\lambda) \quad (3)$$

и для любого $f \in \mathcal{D}_A$

$$(E_{\beta} - E_{\alpha}) Af = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda P^*(\lambda) dS(\lambda) P(\lambda) f. \quad (4)$$

Отметим, что $P^*(\lambda)$ есть оператор проектирования на $\mathfrak{R}_{\lambda}$ параллельно $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

Пусть теперь оператор A регулярен. В этом случае формулы (3), (4) справедливы при любых вещественных α и β . Из (4) следует, в частности, что для любого $f \in \mathcal{D}_A$

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P^*(\lambda) dS(\lambda) P(\lambda) f;$$

несобственный интеграл сходится здесь в сильной топологии.

Поставим в соответствие каждому $f \in H$ векторнозначную функцию $f_{\mathfrak{R}}(\lambda) = P(\lambda)f$, аналитическую на вещественной оси. Если $f \in \mathcal{D}_A$, то $(Af)_{\mathfrak{R}}(\lambda) = \lambda f_{\mathfrak{R}}(\lambda)$. Из (3) вытекает

Теорема 3. Для любого $f \in H$ имеет место равенство

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} (dS(\lambda) f_{\mathfrak{R}}(\lambda), f_{\mathfrak{R}}(\lambda)).$$

Таким образом, H реализуется в виде некоторого пространства аналитических векторнозначных функций, являющегося подпространством в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{R}; (-\infty, \infty), dS(\lambda))$ **, а оператору A отвечает при этом часть оператора умножения на независимую переменную. Если отождествить A с его реализацией, то оператор умножения на независимую переменную в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{R}; (-\infty, \infty), dS(\lambda))$ является тем минимальным самосопряженным расширением оператора A в смысле теории М. А. Наймарка ⁽⁸⁾, которое определяет рассматриваемую спектральную функцию E_{λ} . Попутно мы получаем следующий результат, позволяющий оценить кратность спектра любого минимального самосопряженного расширения регулярного оператора.

Теорема 4. Дефектное подпространство $\mathfrak{R}$ регулярного оператора A является порождающим для любого минимального самосопряженного расширения этого оператора.

* Фундаментальная работа ⁽⁸⁾ посвящена спектральным функциям плотно заданного симметрического оператора, случай оператора с неплотной областью определения рассмотрен в ⁽⁹⁾. Основные результаты ⁽⁸⁾ изложены в ⁽¹⁰⁾.

** Здесь используется обозначение, принятое в ⁽¹¹⁾, стр. 565.

Рассматриваемые здесь вопросы тесно связаны с теорией представления симметрических операторов, построенной М. Г. Крейном (¹, ¹²). Мы получили реализацию регулярного симметрического оператора, выбрав в качестве модуля представления $\mathcal{L}$ дефектное подпространство $\mathfrak{N}$. Согласно леммам 1 и 3, для любого регулярного оператора A существует такой модуль представления $\mathcal{L}$, что всякая вещественная точка является $\mathcal{L}$ -регулярной в смысле терминологии М. Г. Крейна, установившего этот факт в частном случае плотно заданного регулярного оператора с дефектным числом, равным 1 (см. (¹), стр. 34).

Ульяновский государственный
педагогический институт
им. И. Н. Ульянова

Поступило
11 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Г. Крейн, Укр. матем. журн., № 2, 3 (1949). ² М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 53 (1940). ³ А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1, 186 (1968). ⁴ Ю. Л. Шмультян, ДАН, 87, № 1, 11 (1952). ⁵ А. В. Штраус, 67, № 4, 611 (1949). ⁶ А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1, 175 (1970). ⁷ М. Г. Крейн, Ш. Н. Саакян, ДАН, 169, № 6, 1269 (1966). ⁸ М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 3, 277 (1940). ⁹ А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1, 51 (1954). ¹⁰ Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966. ¹¹ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ¹² М. Г. Крейн, Тр. Международного конгр. матем., М., 1968.