Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 517.9:[550.3+551.5] *МАТЕМАТИКА*

Ю. Е. АНИКОНОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 XI 1971)

Пусть E^n — n-мерное эвклидово пространство переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n = 2, 3, \ldots$; Q — шар $|x| \leqslant R$, ∂Q — его граница, B — m-мерное дифференцируемое многообразие, вложенное в пар Q, $u = (u_1, u_2, \ldots \ldots, u_m)$ — локальные координаты B, а $x = x(u)$ — его локальная параметризация, $|u| \leqslant 1$, $m \leqslant n$.

Рассмотрим в паре Q риманову метрику

$$ds^2 = \lambda^2(x)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2) = \lambda^2 dx^2$$

и обозначим через p точку сферы ∂Q. Задание в шаре Q элемента $ds^2 = \lambda^2 dx^2$ индуцирует риманову метрику

$$d\bar{s}^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}(u)\, du_i du_j$$

на многообразии B. Для этого в равенстве $ds^2 = \lambda^2 dx^2$ нужно положить

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j.$$

Для геофизики представляет интерес задача исследования многообразия B с индуцированной метрикой

$$d\bar{s}^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(u)\, du_i\, du_j,$$

если на поверхности сферы ∂Q задана некоторая интегральная информация, связанная с этим многообразием. Такой информацией может служить функция $g(u, p) = \int\limits_{\Gamma(x(u), p)} \lambda\, |dx| + a\,(x\,(u))$ переменных (u, p), где $\Gamma(x(u), p)$ — геодезическая метрики $ds^2 = \lambda^2 dx^2$, соединяющая точки $x(u) \in B$ и $p \in \partial Q$. При этом функции $\lambda = \lambda(x)$, $a = a(x)$ и параметризация $x = x(u)$ априори неизвестны, а заданную функцию $g(u, p)$, вообще говоря, нельзя считать даже непрерывной.

Прежде чем переходить к формулировке и доказательству результатов по этой задаче, приведем физическую интерпретацию введенных выше терминов. Шар Q можно считать Землей, многообразие $B \subset Q$ — множество эпицентров землетрясений, $1/\lambda(x) = v(x)$ — скорость распространения объемных волн в Земле, $a(x)$ — время начала землетрясения в эпицентре $x = x(u) \in B$, заданная функция $g(u, p)$ — это «занумерованные» времена прихода возмущения на поверхность Земли, регистрируемые сейсмоприемниками, причем u — «номер» землетрясения, p — «номер» приемника.

Теорема 1. *Пусть функция $\lambda(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и через каждые две точки x_1 и x_2 шара Q проходит одна и только одна геодезическая $\Gamma(x_1, x_2)$ метрики $ds^2 = \lambda^2 dx^2$.*

Тогда функция $R(u, p_1, p_2) = g(u, p_1) - g(u, p_2)$ переменных (u, p_1, p_2), $|u| \leqslant 1$, $p_i \in \partial Q$, непрерывно дифференцируема и имеет место формула

$$d\bar{s}^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(u)\, du_i du_j = \frac{1}{4}\left[\max_{p_1, p_2}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial u_j} du_j\right)\right]^2.$$

Из теоремы 1 ясно, что внутренняя геометрия риманова многообразия B определяется функцией $g(u, p)$. Это приводит к интересным для приложений следствиям.

Следствие 1. *Пусть размерность пространства E^n равна трем и B — замкнутая выпуклая поверхность уровня функции $\lambda = \lambda(x)$, т. е. $B = \{\lambda(x) = c\}$.*

Тогда поверхность B однозначно определяется функцией $g(u, p)$ с точностью до подобия и положения в шаре Q.

Следствие 2. *Пусть $m = n$ и B — односвязная область с гладкой границей; тогда функция $\lambda = \lambda(x)$, $x \in B$, и область B одновременно определяются однозначно функцией $g(u, p)$ с точностью до конформных преобразований области B.*

В работах П. П. Белинского и Ю. Г. Решетняка по пространственным квазиконформным отображениям, в частности, показано, что при $n > 2$ конформные преобразования — это мёбиусовы преобразования и имеет место оценка устойчивости, см. ([5], [6–8]).

При дополнительных предположениях относительно многообразия B и функции $a(x)$ удается несколько усилить теорему 1. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть B — односвязная n-мерная область с гладкой границей и функция $a = a(x) = 0$ для $x \in B$.*

Тогда элементы матрицы $c_{ij}(u)$, обратной к $(\lambda_{ij}(u))$, при любом $p \in \partial Q$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial u_j} c_{ij}(u) = 1$$

и поэтому однозначно определяются набором $g^k(u) = g(u, p_k)$ значений функции $g(u, p)$ в тех точках $p = p_k \in \partial Q$, где отличен от нуля определитель $\left|\frac{\partial g^k}{\partial u_i} \frac{\partial g^k}{\partial u_j}\right|$, $k = 1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. При этом функция $\lambda(x)$ для $x \in B$ и область B находятся однозначно с точностью до конформных преобразований.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
23 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, 1, ч. 2, М.—Л., 1935. [2] А. В. Погорелов, Бесконечно-малые изгибания общих выпуклых поверхностей, Харьков, 1959. [3] А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, М., 1950. [4] Ю. А. Волков, ДАН, 178, № 1 (1968). [5] П. Т. Белинский. ДАН, 147, № 5 (1962). [6] Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 7, № 4 (1966). [7] Ю. Г. Решетняк, Там же, 8, № 1 (1967). [8] Ю. Г. Решетняк, Там же, 8, № 3 (1967).