

УДК 517.946.56

МАТЕМАТИКА

Б. М. БУДАК, В. Н. ВАСИЛЬЕВА

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 1 XI 1971)

Рассмотрим обратную задачу Стефана, состоящую в определении потока $h(t) = a(0, t)u_x(0, t) \in C^\alpha[0, T]$, $0 < \alpha \leq 1$, обеспечивающего желаемое движение фазового фронта $s(t)$, и функции $u(x, t)$ из условий*

$$\begin{aligned} \rho(x, t)u_t &= (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + c(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0), \quad u(s(t), t) = \mu(s(t), t); \quad (I^0) \\ a(s(t), t)u_x(s(t), t) &= -\kappa(s(t), t)\dot{s}(t) + v(s(t), t). \end{aligned}$$

Здесь $\kappa(s(t), t) \geq \kappa_0 > 0$, $s(0) = l > 0$. Будем предполагать, что $\rho(x, t) \in C^{\alpha, 1}(Q)$, $a(x, t) \in C^{1+\alpha, 1}(\bar{Q})$; $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(Q)$; $\varphi(x) \in C^1[0, l]$, $\mu(s(t), t)$, $\kappa(s(t), t)$, $v(s(t), t)$, $\dot{s}(t) \in C^1[0, T]$, $0 < \alpha \leq 1$, и выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \varphi(s(0)) &= \mu(s(0), 0), \\ a(s(0), 0)\varphi'(s(0)) &= -\kappa(s(0), 0)\dot{s}(0) + v(s(0), 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Известно⁽¹⁻³⁾, что решение такой задачи существует не для любых функций $\varphi(x)$, $\mu(s(t), t)$, $\kappa(s(t), t)$, $v(s(t), t)$, а если и существует, то неустойчиво.

Предлагаемый ниже метод позволяет находить решение поставленной задачи в случае его существования или строить некоторое квазирешение в противном случае.

Наряду с исходной задачей (I^0) , рассмотрим вспомогательные задачи

$$\begin{aligned} \rho(x, t)\bar{u}_t &= (a(x, t)\bar{u}_x)_x + b(x, t)\bar{u}_x + c(x, t)\bar{u} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q; \\ \bar{u}(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0), \quad a(0, t)\bar{u}_x(0, t) = h(t), \quad (I') \\ \bar{u}(s(t), t) &= \mu(s(t), t), \quad 0 \leq t \leq T. \\ \rho(x, t)\bar{\bar{u}}_t &= (a(x, t)\bar{\bar{u}}_x)_x + b(x, t)\bar{\bar{u}}_x + c(x, t)\bar{\bar{u}} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q; \\ \bar{\bar{u}}(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s(0), \quad a(0, t)\bar{\bar{u}}_x(0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (I'') \\ a(s(t), t)\bar{\bar{u}}_x(s(t), t) &= -\kappa(s(t), t)\dot{s}(t) + v(s(t), t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Здесь функция $h(t) \in C^\alpha[0, T]$, где $0 < \alpha \leq 1$ и выполнено условие согласования

$$a(0, 0)\varphi'(0) = h(0). \quad (2)$$

При сделанных предположениях относительно коэффициентов уравнения и функций, входящих в начальное и граничное условия, гарантируется существование и единственность достаточно гладких решений $\bar{u}(x, t)$ и $\bar{\bar{u}}(x, t)$ задач (I') , (I'') ⁽⁴⁾.

* $Q = \{(x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}$.

Введем функционал

$$J(h) = \iint_Q (\bar{u} - \bar{u})^2 dx dt = \|\bar{u} - \bar{u}\|_{L_2(Q)}^2. \quad (3)$$

Ясно, что $J(h) \geq 0$ при любой функции $h(t) \in W_2^1[0, T]$ при условии (2).

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием существования решения обратной задачи Стефана (Γ^0) является наличие такого элемента $h^*(t) \in C^a[0, T]$, для которого справедливо равенство*

$$J(h^*(t)) = 0 \text{ при } h^*(t) = a(0, t)u_x^0(0, t), \quad (4)$$

где $u^0(x, t)$ — решение обратной задачи Стефана (Γ^0).

Будем предполагать, что $h(t) \in W_2^1[0, T]$ (это обеспечивает принадлежность $h(t)$ классу $C^a[0, T]$ при $0 < a \leq 1/2$ (5)), а в качестве множества, пробегаемого элементом $h(t)$, возьмем, например, множество

$$G_R = \{h(t) \in W_2^1[0, T] : h(0) = a(0, 0)\varphi'(0), \quad \|h(t)\|_{W_2^1} \leq R\} = G \cap \Pi_R,$$

где приняты следующие обозначения:

$$G \equiv \{h(t) \in W_2^1[0, T] : h(0) = a(0, 0)\varphi'(0)\},$$

$$\Pi_R \equiv \{h(t) \in W_2^1[0, T] : \|h(t)\|_{W_2^1} \leq R\}.$$

Обозначим $J^*(R) = \inf_{h \in G_R} J(h)$. Теорему 1 можно теперь переформулировать следующим образом.

Теорема 1'. *Равенство $J^*(R) = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что обратная задача Стефана (Γ^0) разрешима и элемент $h^*(t) = a(0, t)u_x^0(0, t) \in G_R$, где $u^0(x, t)$ — решение задачи (Γ^0), причем элемент $h^*(t)$ таков, что $J(h^*(t)) = J^*(R) = 0$.*

Для построения решения обратной задачи Стефана (Γ^0), или ее квазирешения, если решение не существует, мы воспользуемся, опираясь на теоремы 1, 1', минимизацией функционала (3). Для этой цели в первую очередь нужно изучить свойства функционала (3) и свойства множества G_R . Легко показать, что множество G_R выпукло, замкнуто и ограничено в $W_2^1[0, T]$. Множество G также является выпуклым в пространстве $W_2^1[0, T]$. Легко доказать, что справедлива

Теорема 2. *Функционал $J(h)$ является выпуклым функционалом.*

Для доказательства дальнейших теорем используются леммы об априорных оценках функций и их производных, при этом приходится несколько модифицировать методы работы (6).

Теорема 3. *Функционал $J(h)$ является непрерывным в метрике пространства $W_2^1[0, T]$ и в метрике $L_2[0, T]$ на множестве G_R .*

Теорема 4. *Функционал $J(h)$ дифференцируем в пространстве $L_2[0, T]$ и его градиент $J'(h)$ имеет вид*

$$J'(h) = \bar{\Psi}(0, t) + \bar{\bar{\Psi}}(0, t),$$

где $\bar{\Psi}(x, t)$ и $\bar{\bar{\Psi}}(x, t)$ — решения соответствующих сопряженных задач (I_Ψ') , (I_Ψ'') при $x = 0$.

Теорема 5. *Градиент функционала $J'(h)$ удовлетворяет условию Липшица по h в $L_2[0, T]$ с константой, определяемой через исходные данные.*

Последняя теорема обеспечивает достаточно быструю сходимость градиентных методов для минимизации $J(h)$ на G_R . При решении вспомогательной экстремальной задачи $\inf_{G_R} J(h)$ будем различать два случая:

А) решение $u^0(x, t)$ обратной задачи Стефана (Γ^0) существует на G_R ,

Б) исходные данные задачи (Γ^0) таковы, что она не имеет решения на G_R .

Теорема 6. При $R \rightarrow R^*$ имеют место соотношения

$$\|\bar{u}_R - u^0\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0, \quad \|\bar{\bar{u}}_R - u^0\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0.$$

Введем семейство функций

$$u_R^\alpha = \alpha \bar{u}_R + (1 - \alpha) \bar{\bar{u}}_R, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Утверждение 1. При любом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 1$, имеет место сходимость

$$\|u_R^\alpha - u^0\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow R^*.$$

Утверждение 2. Стационарная точка α_R функции $\Phi_R(\alpha)$ при $R < R^*$ является точкой минимума, причем $0 < \alpha_R < 1$, т. е.

$$\Phi_R(\alpha) = \min_{-\infty < \alpha < +\infty} \Phi_R(\alpha) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi_R(\alpha),$$

$$\Phi_R(\alpha) = \|(1 - \alpha) [\bar{u}_R(s(t), t) - u(s(t), t)]\|_{L_2}^2 + \left\| \alpha \left[a \frac{\partial \bar{u}_R}{\partial x} \Big|_{x=s(t)} + \kappa \dot{s} - v \right] \right\|_{L_2}^2.$$

Теорема 7. При $R \rightarrow R^*$ функции $u_R^{\alpha_R}(x, t)$ * сходятся в норме W_2^{21} к решению $u^0(x, t)$ обратной задачи.

Прежде чем перейти к исследованию случая Б), введем множества **

$$U = \{u \in W_2^{21}(Q) : u = \bar{u} - \bar{\bar{u}}, \bar{u} = \bar{p}h, \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{p}}h, h \in G, h(0) = a(0, 0)\varphi'(0)\},$$

$$U_R = \{u \in W_2^{21}(Q) : u = \bar{u} - \bar{\bar{u}}, \bar{u} = \bar{p}h, \bar{\bar{u}} = \bar{\bar{p}}h, h \in G_R, h(0) = a(0, 0)\varphi'(0)\};$$

тогда экстремальные задачи могут быть записаны следующим образом:

$$J^* = \inf_{h \in G} J(h) = \inf_{u \in U} \|u\|_{L_2}^2,$$

$$J^*(R) = \inf_{h \in G_R} J(h) = \inf_{u \in U_R} \|u\|_{L_2}^2.$$

Утверждение 3. Множество U является выпуклым.

Утверждение 4. Множество U_R при любом фиксированном R является выпуклым, ограниченным и замкнутым в $L_2(R)$.

Известно ⁽⁹⁾, что выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве содержит единственный элемент с наименьшей нормой. Следовательно, при любом $R > 0$ существует единственный элемент $u_R \in U_R$ такой, что $\|u_R\|_{L_2}^2 = \inf_{u \in U_R} \|u\|_{L_2}^2 = J^*(R)$.

Замыкание множества U в норме $L_2(Q)$, обозначим его $\bar{U}$, также содержит единственный элемент $\dot{u}(x, t)$, для которого справедливо равенство $\|\dot{u}\|_{L_2}^2 = \inf_{\dot{u} \in \bar{U}} \|\dot{u}\|_{L_2}^2$.

Заметим, что в случае А) элемент $\dot{u} = 0$, и, согласно теореме 1, принадлежит множеству U . В случае Б) может оказаться, что 1Б) элемент $\dot{u} \in U$, 2Б) элемент $\dot{u} \in \bar{U} \setminus U$.

В случае 1Б) множество

$$\dot{G} = \{h \in G : \dot{u} = \bar{u} - \bar{\bar{u}}, \bar{u} = \bar{p}h, \bar{\bar{u}} = \bar{p}h\}$$

непусто и для любого $\dot{h} \in \dot{G}$ справедливо равенство

$$J(\dot{h}) = \inf_G J(h) = \inf_U \|u\|_{L_2}^2 = J^*.$$

* $\bar{u}_R^{\alpha_R}$ назовем квазирешением (I⁰) на G_R при $R < R^*$; квазирешение минимизирует невязку $\Phi_R(\alpha)$ в $L_2[0, T]$ по параметру α .

** $\bar{u} = \bar{p}h$ и $\bar{\bar{u}} = \bar{\bar{p}}h$ — решения краевых задач (I') и (I'').

Если множество G содержит более одного элемента, то на множестве G можно определить семейство квазирешений как множество таких пар $(h, u^*(x, t, h))$, для которых

$$h \in \bar{G}, \quad u^*(x, t, h) = \alpha(h) \bar{u}^0(x, t, h) + (1 - \alpha(h)) \bar{\bar{u}}^0(x, t, h),$$

где $\bar{u}^0(x, t, h) = \bar{P}h$, $\bar{\bar{u}}^0(x, t, h) = \bar{\bar{P}}h$, а число $\alpha(h)$ выбирается из условия

$$\bar{\Phi}(\alpha(h), h) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\alpha, h).$$

Здесь

$$\Phi(\alpha, h) = \|u_\alpha^*(s(t), t; h) - u(s(t), t)\|_{L_2}^2 + \left\| a \frac{\partial u_\alpha^*(x, t; h)}{\partial x} \right\|_{x=s(t)} + \|\kappa \dot{s} - v\|_{L_2}^2,$$

$$u_\alpha^*(x, t; h) = \alpha \bar{u}^0(x, t; h) + (1 - \alpha) \bar{\bar{u}}^0(x, t; h).$$

Для функции $\Phi(\alpha, h)$ при фиксированном h справедливо утверждение 2. Для выделения из этого семейства единственного квазирешения можно применить метод расширяющихся множеств. Поскольку $\bar{G}$ выпукло и замкнуто, то оно содержит один элемент с минимальной нормой; обозначим его $h^*(t)$ и положим $R^* = \|h^*(t)\|_{W_2^{21}}$. Тогда согласно (8) при любом $R \leq R^*$ существует единственный элемент $h_R \in G_R$ такой, что

$$J(h_R) = J^*(R);$$

при этом $\|h_R - h\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow R^*$.

Обозначим $\bar{u}_R = \bar{P}h_R$, $\bar{\bar{u}}_R = \bar{\bar{P}}h_R$, $\bar{u}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t, h^*)$, $\bar{\bar{u}}^0(x, t) = \bar{\bar{u}}^0(x, t, h^*)$, $\alpha_R^* = \alpha(h^*)$, $u_R^* = \alpha_R^* \bar{u}^0 + (1 - \alpha_R^*) \bar{\bar{u}}^0$. Как в случае А) (теорема 6), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8. При $R \rightarrow R^*$ имеют место соотношения

$$\|\bar{u}_R - \bar{u}^0\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0, \quad \|\bar{\bar{u}}_R - \bar{\bar{u}}^0\|_{W_2^{21}} \rightarrow 0.$$

Квазирешение (h_R, u_R^*) на множестве G_R при $R \leq R^*$ определим аналогично случаю А) (теорема 6 и замечание после теоремы 7).

Теорема 9. При $R \rightarrow R^*$ квазирешение u_R^* сходится в норме W_2^{21} к функции $u_R^* = u_R^* \alpha_R^*$.

Доказательство легко выполняется от противного.

Теорема 10. Последовательность u_R сходится в $L_2(Q)$ к функции $u(x, t)$.

Используя изложенную методику, можно получить аналогичные результаты, когда исходные данные возмущены в пространствах Гельдера или даже $L_2(Q)$, что существенно для некорректной задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. R. Cannon, J. Douglas, SIAM J. Numer. Anal., 4, № 3 (1967). ² D. Hill, Commun. on Pure and Appl. Math., 20, № 3 (1967). ³ Р. Латтес, Ж. Л. Лионс, Метод квазирешения и его приложения, М., 1970. ⁴ В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 83 (1965). ⁵ О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. ⁶ О. А. Олейник, А. М. Ильин, А. С. Калашников, УМН, 17, в. 3 (1962). ⁷ Б. М. Будаков, Ф. П. Васильев, Приближенные методы решения задач оптимального управления, в. II, ротапринт МГУ, 1969. ⁸ Б. М. Будаков, А. Виньоли, Ю. Л. Гапоненко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 9, № 5 (1969). ⁹ К. Морен, Методы гильбертова пространства, М., 1966.