

В. Г. РОМАНОВ

К ТЕОРЕМАМ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 15 XII 1971)

Многие постановки обратных задач для дифференциальных уравнений укладываются в рамках функционального анализа в следующую схему. Имеется семейство операторов $\{A_q\}$, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y , зависящее от элемента q , принадлежащего некоторому линейному многообразию Q , как от параметра. Наряду с этим имеется оператор B , действующий из X в линейное пространство Z . Задача решения уравнения

$$A_q x = y \quad (1)$$

при заданных $y \in Y$, $q \in Q$ называется прямой задачей для оператора A_q . Обратная к ней задача заключается в отыскании конкретного оператора A_q , принадлежащего семейству операторов $\{A_q\}$ (или, что то же самое, параметра $q \in Q$), если относительно него известно, что оператор B ставит в соответствие решению уравнения (1) при фиксированном y элемент $z \in Z$, т. е.: если x — решение уравнения (1), то

$$Bx = z. \quad (2)$$

Известно, что многие обратные задачи для дифференциальных уравнений приводят к классически некорректным задачам ⁽¹⁻⁶⁾; тем не менее они оказываются корректными в смысле А. Н. Тихонова ⁽¹⁾. Центральным при исследовании задачи на корректность по А. Н. Тихонову является вопрос о единственности ее решения. Именно этому, по отношению к сформулированной обратной задаче (1), (2), и посвящена заметка.

Во многих практически важных случаях оператор B не имеет обратного, а семейство операторов $\{A_q\}$ обладает хорошими свойствами, а именно, для каждого оператора A_q , $q \in Q$, существует обратный ограниченный оператор A_q^{-1} . В связи с этим решение прямой задачи (1) легко находится и обратная задача редуцируется к решению операторного уравнения

$$Uq \equiv BA_q^{-1}y = z \quad (3)$$

относительно $q \in Q$ при фиксированных y, z .

Выше мы уже говорили, что возникающая задача решения уравнения (3) часто не является классически корректной. Исследование уравнения (3) затрудняется также тем, что оно является нелинейным даже в том случае, когда операторы B, A_q линейны. Ниже мы выделяем класс обратных задач, для которых исследование свойств нелинейного уравнения (3) может быть сведено к исследованию свойств семейства линейных операторов.

Теорема 1. Пусть B — линейный оператор, операторы A_q для $q \in Q$ имеют обратные A_q^{-1} и семейство операторов $\{A_q\}$ допускает представление в виде

$$A_q = A + A_q^0, \quad (4)$$

где A — линейный оператор, а оператор A_q^0 — билинейный, т. е. линейный относительно $x \in X$ и $q \in Q$.

Тогда для единственности решения обратной задачи (1), (2) на многообразии Q при любых фиксированных $y \in Y$, $z \in Z$ необходимо и достаточно, чтобы семейство линейных операторных уравнений

$$T_{q_1 q_2} q = 0, \quad (5)$$

где q_1, q_2 — произвольные элементы линейного многообразия Q , а

$$T_{q_1 q_2} q \equiv B A_{q_1}^{-1} A_q^0 A_{q_2}^{-1} y, \quad (6)$$

не имело нетривиальных решений вида $q = q_1 - q_2$.

Следствие (достаточный признак единственности обратной задачи). Пусть семейство линейных операторных уравнений (5) не имеет решений, отличных от нулевого; тогда решение обратной задачи (1), (2) единственно.

Теорема 2. Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, Q — линейное многообразие некоторого нормированного пространства, оператор B и семейство операторов $\{A_q\}$ удовлетворяют условиям теоремы (1). Пусть, кроме того, обратная задача (1), (2) при фиксированном $y \in Y$ имеет единственное решение на множестве $m \subset Q$ и семейство линейных операторов T_{q_1, q_2} , $q_1, q_2 \in m$, обладает тем свойством, что решение операторных уравнений

$$T_{q_1 q_2} q = z$$

равномерно устойчиво (по отношению к различным $q_1, q_2 \in m$) к малым возмущениям правой части.

Тогда решение обратной задачи (1), (2) устойчиво к малым вариациям элемента z при условии, что они не выводят решение задачи за пределы множества m .

Множество m является, таким образом, множеством корректности обратной задачи (1), (2) по А. Н. Тихонову.

Для многих обратных задач для линейных дифференциальных уравнений (включающихся в нахождение коэффициентов этих уравнений) оператор B является проекционным оператором. В частности, если пространство решений уравнения (1) есть некоторое функциональное пространство (например, $C^n(D)$) функций m переменных, определенных на некоторой замкнутой области $D \subset E^m$, то в качестве оператора B можно взять оператор, ставящий в соответствие каждой функции m переменных ее значения на границе области D (см. постановки обратных задач в работах (2-6)). Возникающее при этом семейство операторных уравнений (5) часто приводится в случае линейных дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов к семейству интегральных уравнений Фредгольма первого рода, а в случае уравнений гиперболического типа — к семейству интегральных уравнений, которые характерны для задач интегральной геометрии (см. (4-7)).

С помощью описанного выше приема в работе (8) установлена единственность одномерной обратной задачи для волнового уравнения, заключающейся в определении коэффициента, стоящего перед оператором Лапласа. Подобным же образом может быть исследован целый ряд обратных задач для уравнений математической физики.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, ДАН, 39, № 5, 195 (1943). ² М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. ³ М. М. Лаврентьев, ДАН, 160, № 1, 32 (1965). ⁴ М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, ДАН, 171, № 6, 1279 (1966). ⁵ М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, «Наука», 1969. ⁶ В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, «Наука», 1969. ⁷ И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленькин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962. ⁸ В. Г. Романов, Сборн. Математические проблемы геофизики, в. 2, Новосибирск, 1971, стр. 100.