Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 5

УДК 518:517.944/947 МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЯНЕНКО, Г. В. ДЕМИДОВ

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ДВУХСЛОЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

1. В банаховом пространстве X рассмотрим разностную схему

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = A_1(\tau, h; n)u^{n+1} + A_0(\tau, h; n)u^n + f^n, \quad (1)$$

где A_1, A_0 — линейные операторы в X, n — целое неотрицательное число, $h=(h_1, \ldots, h_m)$, τ — параметры разностной схемы (1). С разностной схемой (1) свяжем дискретную временную переменную t: $t = l\tau$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ ($h_i > 0, \tau > 0$).

Последовательность функций $\{u^l\}$, $l = 0, 1, \ldots, n, \ldots, u^l \in X$, удовлетворяющая уравнению (1), называется его *решением*.

Если существуют операторы $[I - \tau A_1(\tau, h; n)]^{-1}$, то разностная схема (1) приводится к виду

$$u^{n+1} = C(\tau, h; n)u^n + \tau\varphi^n, \quad (2)$$

где $\varphi^n = [I - \tau A_1(\tau, h; n)]^{-1}f^n$ и оператор шара C определяется как

$$C(\tau, h; n) \equiv [I - \tau A_1(\tau, h; n)]^{-1}[I + \tau A_0(\tau, h; n)]. \quad (3)$$

Схемы (1) и (2) эквивалентны, так как они имеют одни и те же решения. Разностные схемы обычно рассматриваются одновременно для некоторого множества параметров τ и h, которое является окрестностью нуля. Множество $\Omega \equiv \{x\} \subset R^m$ будем называть *окрестностью нуля*, если а) $x_i > 0$ $\forall x \equiv (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$, б) $0 \in \overline{\Omega}$. Будем говорить, что Ω является *полной окрестностью нуля*, если Ω — окрестность нуля и $\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i \subset \Omega$, где

$$\Omega_i \equiv \{x \mid 0 < x_i < \delta_i\}.$$

Введем оператор $S(\tau, h; n+l, n)$ — оператор перехода со слоя n к слою $n+l$, $l > 0$ [3],

$$S(\tau, h; n+l, n) = C(\tau, h; n+l-1)C(\tau, h; n+l-2)\ldots C(\tau, h; n). \quad (4)$$

Очевидно, что оператор перехода обладает следующими свойствами:

$$S(\tau, h; n+l_1, n+l)S(\tau, h; n+l, n) = S(\tau, h; n+l_1, n), \ l_1 > l > 0; \quad (5)$$

$$S(\tau, h; n, n) = I \ (I \text{ — тождественный оператор}). \quad (6)$$

Определение 1. Оператор $S(\tau, h; n+l, n)$ называется Ω-*устойчивым* в банаховом пространстве X, если

$$\|S(\tau, h; n+l, n)\| \leqslant M(T) \quad \text{при} \quad n\tau < (n+l)\tau < T \quad (7)$$

равномерно по $(\tau, h) \in \Omega$, где $M(T)$ — постоянная.

Если Ω — полная окрестность нуля, то при выполнении (7) будем говорить, что оператор $S(\tau, h; n+l, n)$ *абсолютно устойчив*, в противном случае Ω-устойчивый оператор будем называть *условно устойчивым*.

Определение 2. Будем говорить, что разностная схема (1) Ω-*устойчива* в X (*асболютно устойчива*, *условно устойчи-*

в а), если оператор $S(\tau, h; n+l, n)$ Ω-устойчив в X (абсолютно устойчив, условно устойчив).

Пусть $U \equiv \{u(t)\}$ — класс функций со значениями в X, непрерывных по t и непрерывно дифференцируемых по t при $t \in [0, T]$.

Определение 3. Будем говорить, что разностная схема (1) обладает свойством Ω-аппроксимации на классе функций U, если сильный предел в X

$$\lim_{\substack{(\tau, h)\to 0 \\ \Omega}} \left[\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} - A_1(\tau, h; u)\, u(t+\tau) - A_0(\tau, h; n)\, u(t)\right] \equiv f_u(t) \tag{8}$$

существует равномерно по t при $t \in [0, T]$, $t = n\tau$, $u \in U$.

Если Ω — полная окрестность нуля, то при выполнении (8) будем говорить, что схема (1) обладает свойством абсолютной аппроксимации на классе функций U или является абсолютно аппроксимирующей на классе функций U. Если разностная схема (1) обладает свойством Ω-аппроксимации и не является абсолютно аппроксимирующей, то будем говорить, что она является условно аппроксимирующей на классе функций U.

Теорема 1. *Пусть разностная схема* (1) *Ω-устойчива в X, обладает свойством Ω-аппроксимации на классе функций U, и пусть $f = f_u$ вычислена с помощью предельного перехода* (8) *по некоторой $u(t) \in U$.*

Если

$$1)\ \lim_{\substack{(\tau, h)\to 0 \\ \Omega}} u^0 = u(0), \tag{9}$$

$$2)\ \lim_{\substack{(\tau, h)\to 0 \\ \Omega}} f^n = f(t),\ t = n\tau \ \text{равномерно по}\ t, \tag{10}$$

3) *операторы $[I - \tau A_1(\tau, h; n)]^{-1}$ ограничены по $(\tau, h) \in \Omega$, $t = n\tau \leqslant T$, то решение $\{u^n\}$ разностной схемы* (1) *сходится к $u(t)$ равномерно по t при $(\tau, h) \underset{\Omega}{\to} 0$.*

Следствие. *В условиях теоремы 1 класс функций U является классом единственности решения задачи Коши:*

$$dv / dt = A(t) v + fu, \quad 0 < t < T, \quad v,\ u \in U, \tag{11}$$

$$v(0) = u(0), \tag{12}$$

где оператор A определяется на U следующим образом:

$$A(t)\varphi(t) = \lim_{\substack{(\tau, h)\to 0 \\ \Omega}} [A_0(\tau, h; n)\varphi(t) + A_1(\tau, h; n)\varphi(t+\tau)], \tag{13}$$

если $\varphi(t) \in U$.

Рассмотрим решение однородной ($f^n = 0$) разностной схемы вида (1)

$$\begin{gathered} \frac{u_{t_0}^{n+1} - u_{t_0}^{n}}{\tau} = A_1(\tau, h; n)\, u_{t_0}^{n+1} + A_0(\tau, h; n)\, u_{t_0}^{n}, \\ u_{t_0}^{k} = u(t_0), \quad u \in U, \quad k\tau = t_0, \quad n > k, \quad t_0, \quad n\tau \in [0, T], \end{gathered} \tag{14}$$

t_0 — фиксировано.

Будем говорить, что $\{u_{t_0}^n\}$ равностепенно непрерывно по t, если

$$\begin{gathered} \| u_{t_0}^{n+p} - u_{t_0}^{n} \| < \varepsilon \quad \text{для} \quad 0 < \tau p < \delta(\varepsilon, t_0, u(t_0)), \\ \tau + |h| < \delta_1(\varepsilon, t_0, u(t_0)), \quad (\tau, h) \in \Omega. \end{gathered} \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть $\forall t_0 \in [0, T]$ множество $U_{t_0} \equiv \{u(t_0) \mid u \in U\}$ плотно в X. Если решения $\{u_{t_0}^n\}$ Ω-устойчивой разностной схемы* (14) *равностепенно непрерывны по t и сходятся при $(\tau, h) \to 0$ для каждой $u \in U$, то* *операторы перехода $S(\tau, h; n, k)$, $n > k$, $n\tau = t \in [0, T]$, сильно сходятся в X к операторам $S(t, t_0)$, удовлетворяющим следующим условиям:*

$$\|S(t, t_0)\| \leqslant M(T), \quad 0 \leqslant t_0 < t \leqslant T; \tag{16}$$

$$S(t, t_1)S(t, t_0) = S(t_1\ t_0), \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < t \leqslant T; \tag{17}$$

$$\|S(t + \Delta t, t_0)u - S(t, t_0)u\| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0 \quad \forall u \in X; \tag{18}$$

$$S(t, t) = I \quad \forall t \in [0, T]. \tag{19}$$

Если оператор шага $C(\tau, h; n)$ не зависит от n, то операторы $S(t, t_0)$ зависят лишь от разности аргументов t и t_0, т. е. $S(t, t_0) = S(t - t_0)$. В этом случае операторы $S(t)$ образуют полугруппу класса (C_0) [2].

В условиях леммы можно говорить, что разностная схема порождает корректную задачу Коши и, в частности, полугруппу [1].

Теорема 2. *Пусть разностная схема* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *причем класс функций $U \equiv \{u(t)\}$ дополнительно удовлетворяет условиям:*

1) *для каждой $u(t) \in U$ соответствующая $f_u(t)$, вычисленная по* (8), *тождественно равна нулю;*

2) *множества $U_{t_0} \equiv \{u(t_0) \,|\, u(t) \in U\}$, $t_0 \in [0, T)$ плотны в X.*

Тогда каждая функция $u(t) \in U$ представима в виде

$$u(t) = S(t, t_0)u(t_0), \quad t > t_0,\ t, t_0 \in [0, \mathrm{T}],$$

где операторы перехода $S(t, t_0)$ удовлетворяют условиям (16) — (19).

Теорема 3. *Пусть разностная схема* (1) *с оператором $A_1(\tau, h; n) = 0$ и оператором шага, не зависящим от n, т. е. $C(\tau, h; n) = C(\tau, h)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.

Тогда

1) *операторы $S(t, t_0)$ образуют полугруппу класса (C_0), т. е. $S(t, t_0) = S(t - t_0)$ и выполнены условия* (16) — (19);

2) *производящий оператор A' полугруппы $S(t)$ является расширением оператора A, определяемого равенством* (13).

2. Разностные схемы вида (1) могут рассматриваться в общих локально выпуклых линейных топологических пространствах. Некоторые предпосылки к этому имеются в работах [4-8]. Свойства аппроксимации и устойчивости налагают существенные ограничения на класс разностных схем вида (1) даже в относительно слабых топологиях. Для примера рассмотрим схему (1) с операторами A_j вида

$$A_j(\tau, h; t, x) = \sum_{k_i=-K_i}^{K_i} \overset{j}{a}_{k_1\ldots k_m}(\tau, h; t, x)\, T_1^{k_1}(h_1)\ldots T_m^{k_m}(h_m), \quad j = 0, 1, \tag{20}$$

где $t = n\tau$, $\overset{j}{a}_{k_1\ldots k_m}$ — квадратные матрицы порядка r, x, h — r-мерные векторы, числа K_i конечны и не зависят от t, x, τ, h (условие равномерной финитности), $T_i(h_i)$ — операторы сдвига [3]. Операторы вида (20) допускают представление

$$A_j(\tau, h; t, x) = \sum_{k_i=0}^{2K_i} \overset{j}{b}_{k_1,\ldots,k_m}(\tau, h; t, x)\, \Delta_1^{k_1}\ldots\Delta_m^{k_m} T_1^{-K_1}(h_1)\ldots T_m^{-K_m}(h_m), \tag{21}$$

где $\Delta_i = (T_i - h_i) - I) / h_i$.

Пусть U — множество векторов размерности r, координаты которых либо нули, либо имеют вид $t^{P_0}x_1^{P_1}\ldots x_m^{P_m}$ с неотрицательными целыми P_i, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Теорема 4. *Если разностная схема вида* (1), (21) *обладает свойством Ω-аппроксимации на классе функций U в топологии поточечной сходимости* (*сходимость в каждой точке* (t, x)), *то*

а) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{\substack{(\tau, h)\to 0\\ \Omega}} [b^0_{k_1\ldots k_m}(\tau, h; t, x) + b^1_{k_1\ldots k_m}(\tau, h; t, x)] = b^0_{k_1\ldots k_m}(t, x),$$

$$\lim_{\substack{(\tau, h)\to 0\\ \Omega}} \tau b^1_{k_1\ldots k_m}(\tau, h; t, x) = b^1_{k_1\ldots k_m}(t, x),$$

б) *оператор $A(t)$, определенный равенством* (*13*), *имеет вид*

$$A(t)u \equiv \sum_{k_i=0}^{2K_i}\left[b^0_{k_1\ldots k_m}(t, x)\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}} + b^1_{k_1\ldots k_m}(t, x)\frac{\partial^{1+k_1+\ldots+k_m}u}{\partial t\,\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}\right].$$

Пример. Разностная схема

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} = \frac{\tau(h-\alpha)}{\tau^2+h^2}\frac{u^n(x+h) - u^n(x)}{h} + \frac{\tau(h+\alpha)}{\tau^2+h^2}\frac{u^{n+1}(x+h) - u^{n+1}(x)}{h}, \tag{22}$$

абсолютно устойчива в $L_2(-\infty, \infty)$ при $\alpha \geqslant 0$, но является условно аппроксимирующей. В зависимости от закона предельного перехода она аппроксимирует различные дифференциальные уравнения и, следовательно, порождает различные полугруппы. Предельными дифференциальными уравнениями для схемы (22) будут

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{1+k^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{1+k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}, \quad \Omega \equiv \{(\tau, h)\,|\,h = k\tau\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}, \quad \Omega \equiv \{(\tau, h)\,|\,h = O(\tau)\}.$$

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
7 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. N. Ianenko, Methodes numeriques nouvelles en mecanique du continu, Actes, Congr. Intern. Math., 3, 1970, p. 297. [2] К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. [3] Н. Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», 1967. [4] А. М. Ильин, ДАН, 164, 491 (1965). [5] V. Thomee, SIAM J. Numer Anal., 4, № 1 (1967). [6] Н. Н. Кузнецов, Информ. бюлл. Численные методы механики сплошной среды, 1, № 2, Новосибирск (1970). [7] Н. Н. Кузнецов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 6 (1971). [8] Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов, Сборн. Проблемы прикладной математики и механики, «Наука», 1972.