

Это обеспечивается установкой разветвленной системы измерения уровня сигнала на ограждающих конструкциях. Использование данных систем гарантирует решение следующих задач:

- контроль работоспособности преобразователей и системы в целом;
- контроль выполнения требований по защите помещений.

Если первая задача не предполагает серьезных требований к системе контроля и на рынке, уже представлены приборы, в которых она нашла реализацию, то для решения второй задачи необходимо применение точных измерительных устройств (шумомеров) 0-1 класса точности, что значительно повышает стоимость системы.

Рассмотрев основные особенности систем виброакустического зашумления, следует коснуться их дополнительных функций, к которым относятся:

- активация системы по голосу (по наличию сигнала);
- модульная реализация системы.

Таким образом, при проработке различных решений по обеспечению защиты речевой информации от утечки по акустическому и виброакустическому каналам целесообразно оперировать различными методами и средствами защиты. Тем не менее не стоит забывать о ряде других каналов утечки речевой информации, которые являются не менее опасными, но это тема другой статьи.

Библиографический список:

1. Волокитин А.В., Маноскин А.П., Солдатенков А.В., Савченко С.А., Петров Ю.А. Информационная безопасность государственных организаций и коммерческих фирм: справ. пособие /под общ. ред. Л.Д. Реймана. М.: НТЦ «ФИОРД-ИНФО», 2002г. - 272 с.
2. Петраков А.В. Основы практической защиты информации: уч. пособие. 3-е изд. - М.: Радио и связь, 2001. - 368с.
3. Хорошко В.А., Чекатков А.А. Методы и средства защиты информации. К.: Изд-во Юниор, 2003г.-504с.
4. WEB-сайт www.razvedka.ru

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ

Кечко Е.П., Старовойтов А.П.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ натуральных чисел.

Недиagonalными многочленами Эрмита – Паде 1-го рода системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leq n_p - 1$, $p = 0, 1, \dots, k$, среди которых хотя бы один тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, \dots, n_k}(z) = \sum_{p=0}^k A_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1)$$

Если $n_0 = n_1 = \dots = n_k = n$, то многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называются диагональными многочленами Эрмита – Паде 1-го рода системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. Многочлены $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$ были введены Эрмитом в работе [1], посвященной изучению алгебраических свойств числа e .

Многочлены Эрмита – Паде экспоненциальных функций изучаются в работах как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и современных математиков (А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин, А.И. Аптекарев, Н. Stahl, Е. Saff, R. Varga, G. Chudnovsky, P. Borwein, W. Van Assche, A.B.J. Kuijlaars, F. Wielonsky и др). Однако до сих пор в большей степени остается изученным только диагональный случай многочленов Эрмита – Паде экспоненциальных функций. Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных многочленов Эрмита – Паде, в недиаго-

нальном случае не работают. До настоящего времени известна лишь работа К. Драйвер посвященная изучению недиагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент $\{1, e^{-z}, e^{-2z}\}$.

Многочлены $A_{n_0}^0(z), A_{n_1}^1(z), \dots, A_{n_k}^k(z)$, удовлетворяющие равенству (1), могут быть получены решением линейной системы $n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1$ однородных уравнений с $n_0 + n_1 + \dots + n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j , $j=0,1,\dots,k$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{p=0}^k (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \quad 0 \leq p \leq k, \quad (2)$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенство (2) не является новым и, по всей видимости, было известно ещё Эрмиту [1].

Цель данной работы, локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. Данная тема не является новой, исследования в этом направлении проводили Г. Сеге, Э. Сафф и Р. Варга, Ф. Вилонский, Г. Шталь (см. подробнее в [3])

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geq 2$, $p=0,1,\dots,k$, $k \geq 1$ нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, $0 \leq p \leq k$, находятся в круге $\{z: |z| < R_{n_p}^p\}$, где

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^k \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}. \quad (3)$$

Согласно теореме 1 нули многочленов Эрмита – Паде $A_{n_p}^p(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R_{n_p}^p$ зависит как от набора $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел, так и от взаимного расположения множителей в показателях экспонент системы $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 1 верхней оценки для модулей нулей $A_{n_p}^p(z)$ в случае, когда $\{n_p\}_{p=0}^k$ фиксированы, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов $A_{n_p}^p(z)$ с помощью интегралов в виде (2) позволяет получить для них явные выражения, а при $2 \leq n_p \leq 4$ найти точные значения всех нулей $A_{n_p}^p(z)$.

Прежде чем перейти к конкретным примерам, напомним, что две бесконечно большие при $\varepsilon \rightarrow a$ функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, принимающие положительные значения, имеют одинаковый порядок $(\varphi(\varepsilon) \asymp \psi(\varepsilon))$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow a} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Далее запись

$$A_{n_p}^p : z_j^p(\varepsilon), \quad j=1,2,\dots,n_p-1$$

означает, что $z_j^p(\varepsilon)$ – нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$. Пусть

$$r_{n_p}^p(\varepsilon) := \max\{|z_j^p(\varepsilon)| : j = 1, 2, \dots, n_p - 1\},$$

а $R_{n_p}^p(\varepsilon)$ – радиус соответствующего круга, который определяется равенством (3). Предположим, что $n_0 = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$. Тогда с помощью элементарных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) &= \frac{3\varepsilon^2 + \varepsilon - 8}{1 - \varepsilon^2}, & A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon - 1 \pm i\sqrt{2\varepsilon^2 + 5}}{\varepsilon}, \\ A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) &= \frac{13\varepsilon - 9}{2\varepsilon(1 - \varepsilon)}, & A_3^3 : z_{1,2}^3(\varepsilon) &= \frac{12\varepsilon + 8 \pm i\sqrt{2}\sqrt{11\varepsilon^2 + 14\varepsilon + 7}}{2\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$r_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp R_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}, \quad p = 1, 2, 3.$$

Если $\varepsilon \rightarrow 1$, то

$$r_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp R_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad p = 0, 1.$$

Аналогично, при $n_0 = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$:

$$\begin{aligned} A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) &= \frac{3\varepsilon^2 - 7 \pm i\sqrt{3\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 7}}{1 - \varepsilon^2}, & A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) &= \frac{7\varepsilon - 4}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \\ A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{3\varepsilon \pm i\sqrt{3\varepsilon^2 + 4}}{\varepsilon}, & A_2^3 : z_1^3(\varepsilon) &= \frac{7\varepsilon + 4}{\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$r_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp R_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}, \quad p = 1, 2, 3,$$

а если $\varepsilon \rightarrow 1$, то

$$r_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp R_{n_p}^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad p = 0, 1.$$

Приведенный пример позволяет утверждать, что для заданной системы экспонент и рассматриваемых наборов значений $\{n_p\}_{p=0}^3$ полученные в теореме 1 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита – Паде являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 1$.

В частных случаях теорема 1 совпадает со всеми известными ранее результатами и содержит их в качестве частных случаев. В диагональном случае многочленов Эрмита – Паде для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ для произвольных различных действительных и комплексных чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ из теоремы 1 следуют утверждения, доказанные в работах [2] и [3] соответственно.

Библиографический список:

1. Hermite C. Sur la généralisation des fractions continues algebriques / C. Hermite // Ann.Math. Pura Appl. Ser. 2A., 1883. – № 21. – P. 289 – 308.
2. Герман А.В. О нулях многочленов Эрмита / А.В. Герман, Е.П. Кечко, А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 2015. – №3(90). – С. 104 – 111.
3. Астафьева А.В. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сб., 2016. – Т. 207, №6. – С. 3–26.