Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 513.88+517.948 МАТЕМАТИКА

М. Ш. БИРМАН, М. З. СОЛОМЯК

СПЕКТРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА НЕГЛАДКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 I 1972)

1. Исследование спектральной асимптотики для негладких эллиптических (возможно, вырождающихся) задач было начато авторами в ([1], [2]). Было показано, что классическая асимптотическая формула для спектра задачи Дирихле справедлива в случае произвольных ограниченных открытых множеств и при весьма слабых предположениях о коэффициентах уравнения. В настоящей заметке приведены дальнейшие результаты в указанном направлении. Эти результаты близки к окончательным: спектральная асимптотика оправдана при тех же естественных условиях, при которых получены оценки спектра. Тем самым устранен «разрыв», имевшийся в ([2]).

Как и в ([1], [2]), спектральная задача ставится в вариационной форме. Рассматриваются задачи, которые в «гладком» случае соответствуют уравнениям вида $\mathscr{B}u = \lambda\mathscr{A}u$. По сравнению с ([1], [2]) постановка задачи расширена: включен случай систем, а также операторов $\mathscr{B}$ нечетного порядка. Рассмотрена задача Неймана. Основные результаты прилагаются к задаче о спектральной асимптотике по малому параметру при старших членах уравнения.

2. Ниже $\mathbf{C}^k$ — унитарное пространство, $f\bar{g}$ — скалярное произведение для $f,\ g \in \mathbf{C}^k$. Если w — $(k \times k)$-матрица, то $\bar{w}$ — ее эрмитово сопряженная. Для открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ обычным образом определяются классы $C_0^\infty\Omega$, $L_\alpha\Omega$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, и классы Соболева $H^l\Omega$; норма в $L_\alpha\Omega$ обозначается через $\|\cdot\|_\alpha$.

Пусть целое $l \geqslant 1$, σ_1, σ_2 — мультииндексы, $|\sigma_1| = |\sigma_2| = l$. Пусть $a(x) = \{a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\}$ — «клеточная» матрица, где $a_{\sigma_1\sigma_2}$ — $(k \times k)$-матрицы и $a_{\sigma_1\sigma_2} = \bar{a}_{\sigma_2\sigma_1}$.

Условие I. *Открытое множество $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ ограничено; $a \in L_{1,\,\mathrm{loc}}\Omega$; почти везде в Ω матрица $a(x)$ положительно определена и $a^{-1} \in L_\alpha\Omega$ при $\alpha^{-1} < 2lm^{-1}$.*

На вектор-функциях $u\colon \Omega \to \mathbf{C}^k$ определим квадратичную форму A:

$$A[u, u] = \sum_{|\sigma_1|=|\sigma_2|=l} \int_\Omega a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\, D^{\sigma_2}u\overline{D^{\sigma_1}u}\, dx. \tag{1}$$

При условии I форма (1) положительно определена на $C_0^\infty\Omega$ как форма в $L_2\Omega$ и допускает замыкание. Через $\mathring{H}(a)$ обозначается пространство, возникающее при пополнении $C_0^\infty\Omega$ по метрике формы A.

3. Будем относить комплексную меру μ к классу $\mathfrak{M}_\beta$, $1 < \beta \leqslant \infty$, если μ абсолютно непрерывна и $d\mu/dx \in L_\beta\Omega$; при этом $\|\mu\|_\beta = \|d\mu/dx\|_\beta$. Через $\mathfrak{M}_1$ обозначается класс всех конечных борелевских мер с нормой $\|\mu\|_{(1)} = |\mu|(\Omega)$. Для матриц включение $\mu \in \mathfrak{M}_\beta$ понимается поэлементно.

Пусть r — целое или полуцелое число, $0 \leqslant r < l$, τ_1, τ_2 — мультииндексы, $|\tau_1| + |\tau_2| = 2r$. Пусть каждой такой паре мультииндексов сопоставлена матричная мера $\mu_{\tau_1\tau_2}$, причем $\mu_{\tau_1\tau_2} = \bar{\mu}_{\tau_2\tau_1}$. Набор мер $\mu = \{\mu_{\tau_1\tau_2}\}$

также будем называть мерой и положим $b = \{b_{\tau_1\tau_2}\} = \{d\mu_{\tau_1\tau_2}/dx\}$. Мера μ указанного вида порождает квадратичную форму

$$B[u, u] = \sum_{\tau_1\tau_2} \int_\Omega \mu_{\tau_1\tau_2}(dx)\, D^{\tau_2}u\overline{D^{\tau_1}u}, \tag{2}$$

$$|\tau_1|, \quad |\tau_2| \leqslant l, \qquad |\tau_1| + |\tau_2| = 2r.$$

Условие II. *В* (2) $\mu_{\tau_1\tau_2} \in \mathfrak{M}_{\beta_{\tau_1\tau_2}}$, *причем*

$$\alpha^{-1} + (\beta_{\tau_1\tau_2})^{-1} < 2(l-r)m^{-1},$$

$$\alpha^{-1} + 2(\beta_{\tau_1\tau_2})^{-1} < 2(l - |\tau_i|)m^{-1} + 1, \quad i = 1, 2.$$

4. При совместном выполнении условий I, II форма (2) вполне непрерывна в пространстве $\overset{\circ}{H}(a)$. Она определяет в $\overset{\circ}{H}(a)$ вполне непрерывный самосопряженный оператор — «оператор задачи $\mathscr{D}(A, B; \Omega)$» (задачи Дирихле). Последовательные собственные значения этого оператора обозначим через $\pm\lambda_n^\pm(A, B, \Omega; \mathscr{D})$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I, II.

Тогда для собственных чисел $\lambda_n^\pm = \lambda_n^\pm(A, B, \Omega; \mathscr{D})$ *справедлива оценка*

$$\lambda_n^\pm \leqslant Cn^{-q}\| a^{-1}\|_\alpha \sum_{\tau_1\tau_2} \|\mu\|_{(\beta_{\tau_1\tau_2})}, \qquad q = 2(l-r)\, m^{-1}. \tag{3}$$

Постоянная C зависит от m, k, l, r, α, $\beta_{\tau_1\tau_2}$ и от диаметра Ω, но не зависит от a и μ.

Если при этом мера μ сингулярна, то $\lambda_n^\pm = o(n^{-q})$.

Переходим к описанию асимптотики, которую удобно формулировать в терминах функций распределения $n_\pm(\lambda) = \sum_k 1$, $\{k\colon \lambda_k^\pm > \lambda\}$. Обозначим через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ символы форм A, B:

$$\mathbf{a}(x, \xi) = \sum_{\sigma_1\sigma_2} a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\, \xi^{\sigma_1+\sigma_2}, \qquad \mathbf{b}(x, \xi) = \sum_{\tau_1\tau_2} b_{\tau_1\tau_2}(x)\, \xi^{\tau_1+\tau_2}.$$

Символы суть эрмитовы $(k \times k)$-матрицы. Сингулярная составляющая меры μ не отражается на символе формы B.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для спектра задачи $\mathscr{D}(A, B; \Omega)$ справедлива асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda) = \omega_\pm(a, b; \Omega), \qquad 2\theta = m(l-r)^{-1}, \tag{4}$$

$$\omega_\pm(a, b; \Omega) = \frac{1}{m(2\pi)^m} \int_\Omega \int_{|\xi|=1} \mathrm{Tr}\,\{[\mathbf{a}^{-1/2}\mathbf{b}\mathbf{a}^{-1/2}]_\pm^\theta\}\, dS(\xi)\, dx. \tag{5}$$

Внутренний интеграл в (5) берется по $(m-1)$-мерной мере Лебега на сфере. Формулы (4), (5) показывают, что в рассматриваемых условиях сингулярная составляющая меры μ не дает вклада в главный член асимптотики. Условие II является не слишком грубым достаточным условием конечности интеграла (5).

5. Аналогичные результаты для задачи Неймана удается получить лишь при более стеснительных ограничениях. Условимся говорить, что Ω — множество класса $\mathscr{K}$, если существует ограниченный оператор продолжения из $H^l\Omega$ в $H^l\mathbf{R}^m$. Будем предполагать, что a, $a^{-1} \in L_\infty\Omega$. При любом $t > 0$ форма $A[u, u] + t\|u\|_2^2$ определяет в $H^l\Omega$ норму, эквивалентную стандартной. Оператором задачи $\mathscr{N}_t(A, B; \Omega)$ (задачи Неймана) мы называем оператор, определяемый квадратичной формой (2) в пространстве $H^l\Omega$ с указанной нормой.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\Omega \in \mathcal{K}$, a, $a^{-1} \in L_\infty\Omega$ *и выполнено условие* II *при* $\alpha = \infty$.

Тогда для собственных значений $\lambda_n^{\pm} = \lambda_n^{\pm}(A, B, \Omega; \mathcal{N}_t)$ *оператора задачи* $\mathcal{N}_t(A, B; \Omega)$ *имеет место оценка* (3), *где* $C = C(\Omega, t, k, l, r, \beta_{\tau_1\tau_2})$.

При тех же условиях для спектра задачи $\mathcal{N}_t(A, B; \Omega)$ *справедлива асимптотическая формула* (4), (5).

6. Основные результаты могут быть применены к исследованию спектральных задач, содержащих малый параметр. Пусть в Ω, наряду с формами A и B, задана также квадратичная форма G вида (1) дифференциального порядка $r_g < l$; матрицу, порождающую форму G, обозначим через g. Порядок формы B в этом пункте будем обозначать через r_b. Форма G задана на некотором множестве $\mathfrak{d}[G]$ функций в Ω, причем $G[u, u] > 0$ при $u \in \mathfrak{d}[G]$, $u \neq 0$. Предполагается что $\mathfrak{d}[G]$ есть полное гильбертово пространство относительно G-метрики, содержащее $C_0^\infty\Omega$ как плотное подмножество. Предполагается, далее, что для формы A выполнено условие I и что для обеих пар A, B и A, G выполнено условие II.

При фиксированном $h > 0$ квадратичная форма $hA + B$, рассматриваемая на $\mathring{H}(a)$, замкнута и полуограничена в гильбертовом пространстве $\mathfrak{d}[G]$. Оператор в $\mathfrak{d}[G]$, определяемый формой $hA + B$, имеет дискретный спектр. Число собственных значений этого оператора в $(-\infty, \Lambda)$ будем обозначать через $\nu_h(\Lambda)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть формы* A, B, G *удовлетворяют поставленным выше условиям.*

Тогда 1) *Если* $r_b > r_g$ *или* $r_b \leqslant r_g$ *и* $\Lambda = 0$, *то*

$$\lim_{h\to 0} h^\theta \nu_h(\Lambda) = \omega_-(a, b; \Omega), \qquad 2\theta = m(l - r_b)^{-1}.$$

2) *Если* $r_g > r_b$, $\Lambda \neq 0$, *то* (*при* $\varepsilon = \operatorname{sign}\Lambda$)

$$\lim_{h\to 0} h^\theta \nu_h(\Lambda) = |\Lambda|^\theta \omega_\varepsilon(a, g; \Omega), \qquad 2\theta = m(l - r_g)^{-1}.$$

3) *Если* $r_b = r_g$, *то*

$$\lim_{h\to 0} h^\theta \nu_h(\Lambda) = \omega_+(a, \Lambda g - b; \Omega).$$

Аналогичный результат справедлив также для задачи $\mathcal{N}_t$.

Теорема 4 сводится к теореме 2 приемом, описанным в ([3], [4]).

7. В некоторых случаях результаты п.п. 4—6 распространяются на задачи в неограниченных областях. Ниже приводится один пример, относящийся к уравнению Шредингера в $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 3$.

Пусть $k = 1$, $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in L_m\Omega$, $b_0 \in L_{m/2}\Omega$, $\operatorname{Im} b_0 = 0$. В $L_2\mathbf{R}^m$ рассмотрим задачу о спектре квадратичной формы

$$h\int |\nabla u|^2 dx - 2\operatorname{Re}\int \Big(iu \sum_{1\leqslant j\leqslant m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_0 |u|^2 \Big) dx, \qquad u \in H^1\mathbf{R}^m. \tag{6}$$

В случае дифференцируемого $\mathfrak{b}$ форма (6) соответствует оператору Шредингера вида

$$-h\Delta u + i \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(b_j u) + \bar{b}_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] - 2b_0 u. \tag{7}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\operatorname{Im} b_0 = 0$, $b_0 \in L_{m/2}\mathbf{R}^m$, $\mathfrak{b} \in L_m\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 3$.

Тогда число ν_h *отрицательных собственных значений формы* (6) (*оператора* (7)) *конечно и при* $h \to 0$ *удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$\lim_{h\to 0} h^m \nu_h = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-m}}{\Gamma(1 + m/2)} \int |\mathfrak{b}|^m dx.$$

При доказательстве, наряду с результатами настоящей заметки, существенно используются оценки из работы ([5]).

Отметим, что при $\mathfrak{b} \equiv 0$ асимптотика функции ν_h обсуждалась в ([4]), где условия на b_0 несколько завышены. С помощью оценок из ([5]) соответствующий результат оправдывается при единственном условии $b_0 \in L_{m/2}\mathbf{R}^m$.

8. Метод доказательства основных результатов заметки — вариационный; он представляет дальнейшее развитие соображений, использованных авторами в ([1], [2]). При доказательстве оценок спектра применяется аппроксимационная техника, предложенная в ([6]). Асимптотическая формула (4), (5) легко устанавливается для задач с «гладкими» данными. Основные трудности возникают при ее распространении на случай форм A, порождаемых негладкими вырождающимися матрицами a. Эти трудности преодолеваются на основе техники теории возмущений. Ниже приводятся некоторые факты теории операторов, используемые при доказательстве; возможно, они представляют самостоятельный интерес. Через $\pm\lambda_k(V)$ обозначим последовательные собственные числа вполне непрерывного самосопряженного оператора V, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Лемма 1. *Пусть T_1, T_2 — неотрицательные самосопряженные операторы и $V = T_1 - T_2$ вполне непрерывен.*

Тогда $W = \sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}$ вполне непрерывен и имеют место неравенства

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} [\lambda_k^{\pm}(W)]^2 \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k^{\pm}(V), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Лемма 2. *Пусть J_1, J_2 — неотрицательные самосопряженные операторы. Пусть оператор V и определенный на $\mathfrak{D}(J_2)$ оператор J_1VJ_2 вполне непрерывны.*

*Тогда при любом $\varkappa \in (0, 1)$ оператор $J_1^{\varkappa}VJ_2^{\varkappa}$ вполне непрерывен, и для его сингулярных чисел * справедливы неравенства*

$$\prod_{k=1}^{n} s_k(J_1^{\varkappa}VJ_2^{\varkappa}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} s_k^{1-\varkappa}(V) \prod_{k=1}^{n} s_k^{\varkappa}(J_1VJ_2), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Если оператор J_1VJ_2 лишь ограничен, то (8) сохранит силу, если все сомножители $s_k(J_1VJ_2)$, $k = 1, \ldots, n$, заменить числом $\|J_1VJ_2\|$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 2 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 4, в. 4 (1970). [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 5, в. 1 (1971). [3] М. Ш. Бирман, Матем. сборн., 55, № 2 (1961). [4] М. Ш. Бирман, В. В. Борзов, Сборн. Проблемы математической физики, в. 5, Л., 1971. [5] Г. В. Розенблюм, ДАН, 202, № 5 (1972). [6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Матем. сборн., 73, № 3 (1967). [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.

* Относительно сингулярных чисел вполне непрерывных операторов см ([7]).