

В. А. БУЛАВСКИЙ

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 I 1972)

Применение методов повышенной точности, как правило, возможно лишь при достаточно хорошем начальном приближении, которое не всегда легко получить. Кроме того, если начальное приближение и получено, то строгая проверка его достаточной близости к решению представляет не всегда легкую задачу. Между тем, методы повышенной точности такие, как метод Ньютона, могут быть использованы не только для решения систем уравнений, но и для решения задач оптимизации при наличии ограничений в форме неравенств ⁽¹⁾. В некоторых случаях, например, при решении систем выпуклых неравенств, сходящиеся для совместных систем методы не позволяют за конечное число шагов обнаружить неразрешимость задачи. Вопрос же о решении несовместных систем, как уже отмечалось ^(2, 3), представляет существенный интерес. В настоящей статье предлагается некоторая общая схема построения глобально сходящихся итеративных методов. При соблюдении ряда условий шаги таких методов автоматически совпадают с шагами некоторого метода повышенной точности, как только будет достигнута определенная степень приближения.

Пусть Q — замкнутое выпуклое множество в конечномерном пространстве, которое мы будем считать нормированным, и F — непрерывная неотрицательная на Q функция. Предположим, что в каждой точке $x \in Q$ функция F имеет производную $F'(x)\xi$ по направлению ξ , не выходящему из Q . Пусть, далее, в Q выделено относительно открытое подмножество Q_1 . Задача состоит в попадании в множество Q_1 или построении последовательности $\{x_n\}$ точек Q , для которой $\lim F(x_n) = 0$.

Будем считать, что для каждого $x \in Q \setminus Q_1$, задано непустое множество векторов $B(x)$, обладающее тем свойством, что $x + \xi \in Q$ при $\xi \in B(x)$. Итерационный процесс, построенный по формуле $x_{n+1} = x_n + \xi_n$, где $\xi_n \in B(x_n)$, может быть и расходящимся, если, например, x_0 выбрано не очень удачно. Предположим, однако, что нам удалось подобрать такую функцию ψ двух векторных аргументов, что при $x \in Q \setminus Q_1$, $\xi \in B(x)$, $a > 0$ и $F(x) \geq a$ оказывается $-F'(x)\xi > \psi(x, \xi) \geq \delta(a) > 0$.

Построим итерационный процесс следующим образом. Выберем некоторое число $\alpha \in (0, 1)$ и функцию φ на $(0, \alpha)$, для которой $\lambda \leq \varphi(\lambda) \leq 1$ при $\lambda \in (0, \alpha)$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = 0$. Начав с некоторого $x_0 \in Q$, для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ положим $x_{n+1} = x_n + \lambda_n \xi_n$, где $\xi_n \in B(x_n)$, а $\lambda_n \in (0, 1]$ выбрано так, что $F(x_n) - F(x_{n+1}) \geq \lambda_n \psi(x_n, \xi_n)$, а если $\lambda_n < \alpha$, то $F(x_n) - F(x_n + \mu_n \xi_n) \leq \mu_n \psi(x_n, \xi_n)$ для некоторого $\mu_n \in [\lambda_n, \varphi(\lambda_n)]$. Построенный таким образом процесс будем в дальнейшем называть сглаживающим.

Теорема 1. Если точечно-множественное отображение B полунепрерывно сверху (по Какутани), функция ψ полунепрерывна сверху, а F' непрерывна по паре переменных (x, ξ) и $\sup \{\|\xi\| : \xi \in B(x), F(x) \leq a\} < +\infty$ при каждом $a > 0$, то сглаживающий итерационный процесс может оборваться лишь в точках множества $Q_1 \cup \{x \in Q : F(x) = 0\}$, а при его бесконечном продолжении $\lim F(x_n) = 0$.

Условия на отображение B и функции ψ и F' можно ослабить, если несколько усилить требование на соотношение между ψ и F' .

Теорема 2. Пусть $\sup \{\|\xi\|: \xi \in B(x), F(x) \leq a\} < +\infty$ при каждом $a > 0$, $-qF'(x)\xi \geq \psi(x, \xi)$ при некотором $q \in (0, 1)$ и для каждой точки $\bar{x} \in Q$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\|x - \bar{x}\| + \|\xi\| < \delta$ оказывается $|F(x + \xi) - F(x) - F'(x)\xi| < \varepsilon\|\xi\|$.

Тогда в сглаживающем процессе либо на некотором шаге будет получена точка множества $Q_1 \cup \{x \in Q: F(x) = 0\}$, либо $\lim F(x_n) = 0$.

Отметим, что если множество $Q_0 = \{x \in Q: F(x) = 0\}$ компактно и $\lim F(x_n) = 0$, то расстояние от x_n до множества Q_0 стремится к нулю, а если Q_0 состоит из одной точки, то имеет место сходимость последовательности $\{x_n\}$.

Приведем некоторые возможные реализации описанных итерационных процессов. Если функция F выпуклая, $F'(x)\xi \geq \delta(a) > 0$ при $\xi \in B(x)$ и $F(x) \geq a > 0$, вторая производная функции F ограничена на множестве $\{x \in Q: F(x) \leq F(x_0)\}$, то в рассмотренную схему укладывается процесс, при котором в качестве x_{n+1} выбирается ближайшая к x_n точка минимума функции F на отрезке $\{x_n + \lambda\xi_n: \lambda \in [0, 1]\}$. Можно числа λ_n выбирать и более простым способом. Зададимся убывающей положительной последовательностью $\{\tau_s\}$ такой, что $\tau_0 = 1$ и $\lim \tau_s = 0$. В качестве λ_n на каждом шаге будем выбирать наибольшее из τ_s , для которых $F(x_n) - F(x_n + \tau_s\xi_n) \geq \tau_s\psi(x_n, \xi_n)$. Может быть предложена определенная политика поиска λ_n на каждом шаге с использованием информации предыдущих шагов.

Пусть теперь множества сдвигов $B(x)$ получены в каком-нибудь хорошо сходящемся вблизи решения процессе. Если при положительных $F(x)$, достаточно близких к нулю, оказывается $F(x) - F(x + \xi) \geq -qF'(x)\xi \geq \delta(F(x)) > 0$, то, положив $\psi(x, \xi) = -qF'(x)\xi$ и выбрав, где возможно, $\lambda_n = 1$, в условиях теоремы 2 получим сходящийся глобально процесс, который, начиная с некоторого шага, совпадает с исходным. Здесь $q \in (0, 1)$. Такая же картина получается, если при достаточно малых $F(x)$ окажется $(1 - q)F(x) \geq F(x + \xi)$ и $-F'(x)\xi > qF(x)$. В этом случае нужно положить $\psi(x, \xi) = qF(x)$. Проиллюстрируем сказанное на двух типичных задачах.

Пусть $Q \subset R^n$ — непустое выпуклое компактное множество, f — выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая на Q функция, причем $\|f''(x)\| \leq M$ при $x \in Q$. Требуется решить задачу: $\min \{f(x): x \in Q\}$. Для каждой точки $x \in Q$ определим множество $B(x)$ как множество решений задачи: $\min \{f'(x)\xi + 1/2f''(x)\xi\xi: x + \xi \in Q\}$. В случае, когда множество Q является многогранником, для этой задачи разработаны точные методы решения, но могут быть и другие случаи применимости описываемого подхода. Выберем некоторое $q \in (0, 1)$ и положим $\psi(x, \xi) = -qf'(x)\xi$. Если $\min \{f(x): x \in Q\} = c$, то положим $F(x) = f(x) - c$. Поскольку при выборе λ_n приходится вычислять лишь разности значений функции F , то число c знать не нужно. В описанных условиях имеет место следующая

Теорема 3. Если последовательность $\{x_n\}$ получена в сглаживающем процессе, то $\lim f(x_n) = c$, а расстояние от x_n до множества минимумов функции f стремится к нулю.

Предположим теперь дополнительно, что вторая производная функции f удовлетворяет условию Липшица с показателем σ , т. е. $\|f''(x_1) - f''(x_2)\| \leq L|x_1 - x_2|^\sigma$ для всех $x_1, x_2 \in Q$. Положим $Q_0 = \{x \in Q: f(x) = c\}$ и обозначим через H подпространство, параллельное аффинному носителю Q_0 . Обозначим также через $p(x)$ расстояние от точки x до множества Q_0 .

Теорема 4. Пусть $q < 1/2$, $f(x_1) = f(x_2)$, если $x_1 - x_2 \in H$, и существует число $\gamma > 0$ такое, что для $x \in Q$ оказывается $f'(x^*)(x - x^*) + f''(x^*)(x - x^*)(x - x^*) \geq \gamma|x - x^*|^2$, где x^* — ближайшая к x точка Q_0 .

Тогда в сглаживающем процессе, начиная с некоторого шага, можно положить $\lambda_n = 1$. При этом

$$\overline{\lim} (p(x_{n+1}) / [p(x_n)]^{1+\sigma}) \leq L / \gamma(1 - \sigma).$$

В качестве второй задачи рассмотрим следующую. Требуется найти точку в замкнутом выпуклом множестве $Q \subset R^n$, удовлетворяющую системе неравенств $g_k(x) \leq 0$, $k = 1, 2, \dots, r$. Здесь функции g_k предполагаются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми. При каждом $x \in Q$ определим $B(x)$ как множество решений задачи $\min \{|\xi|^2: g_k(x) + g'_k(x)\xi \leq 0, k = 1, 2, \dots, r, x + \xi \in Q\}$. Поскольку эвклидова норма строгая, то $B(x)$ имеет не более одного элемента.

Теорема 5. Если множество $D = \{x \in Q: g_k(x) \leq 0, k = 1, 2, \dots, r\}$ непустое, то последовательность $\{x_n\}$, построенная по формуле $x_{n+1} = x_n + \xi_n$, где $\xi_n \in B(x_n)$, а x_0 — любая точка множества Q , сходится к некоторой точке $\bar{x} \in D$. Пусть к тому же $\|g'_k(x_1) - g'_k(x_2)\| \leq L|x_1 - x_2|^\sigma$ при $x_1, x_2 \in Q$ и существуют числа $c > 0$, $\varepsilon > 0$ и направление η такие, что $g'_k(\bar{x})\eta \leq -c$, $k = 1, 2, \dots, r$, и $\pi\eta \leq -\varepsilon$ для любой единичной внешней нормали π к Q в точке $\bar{x}$ (нормаль берется в афинном носителе Q).

Тогда

$$\overline{\lim} (|x_{n+1} - \bar{x}| / |x_n - \bar{x}|^{1+\sigma}) \leq L / c(1 + \sigma).$$

Если множество D пустое, то описанный процесс может продолжаться бесконечно долго и не указать на несовместность решаемой системы. При-

меним к задаче сглаживающий процесс, положив $F(x) = \sum_{k=1}^r g_k^+(x)$ и $\psi(x, \xi) = qF(x)$, где $q \in (0, 1)$.

Теорема 6. В условиях теоремы 5 сглаживающий процесс совпадает с исходным, начиная с некоторого шага. Если Q — компактное множество и множество D пустое, то на некотором шаге окажется, что $B(x_n)$ пусто.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 5, 787 (1966). ² В. А. Булавский, Сиб. матем. журн., 3, № 3, 313 (1962). ³ И. И. Еремин, Кибернетика, № 4, 124 (1971).