Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 517.946.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Р. ВАЙНБЕРГ, В. Г. МАЗЬЯ

О НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 I 1972)

В этой работе изучается вопрос об однозначной разрешимости линейных стационарных задач отыскания потенциала скоростей слоя тяжелой жидкости, вызванных периодическим возмущением или равномерно движущимся телом. Рамки краткой статьи не позволяют охарактеризовать многочисленные известные результаты, относящиеся к этим задачам (см. [1–20] и др.).

1. Задача об установившихся колебаниях слоя жидкости переменной глубины. Пусть жидкость заполняет область V в полупространстве $R^3_- = \{(x, y, z): z < 0\}$, граница которой состоит из двух непересекающихся компонент: плоскости $z = 0$ и непрерывно дифференцируемой поверхности B, удаленной на конечное расстояние от плоскости $z = 0$. Стационарная задача отыскания потенциала $u(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\{u(x, y, z)e^{-i\omega t}\}$ скоростей жидкости, вызванных периодическим поверхностным давлением $p(x, y)\sin\omega t$, ставится следующим образом. Требуется найти гармоническую в V функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \nu u = -\frac{\omega}{\gamma g} p(x, y) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } B,$$

где n — нормаль к B, направленная внутрь V, $\nu = \omega^2 g^{-1}$, g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, p — произвольная (может быть, обобщенная) функция с компактным носителем.

Решение должно удовлетворять также условию излучения, которое, например, в случае, когда область V в окрестности бесконечности совпадает со слоем $0 > z > -h$, имеет вид

$$u = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda_0 u = o(r^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty;$$

здесь λ_0 — положительный корень уравнения $\lambda \operatorname{th} \lambda h = \nu$.

Лемма 1. *Пусть область $\bar V$ звездна относительно некоторой точки M, расположенной на глубине H, $0 \leqslant H \leqslant \nu^{-1}$. Пусть u — гармоническая в V, непрерывно дифференцируемая в $\bar V$ функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{z=0} |u|^2 dx\,dy + \int\limits_V (|\nabla u|^2 + \rho^{-2}|u|^2)\,dx\,dy\,dz < \infty,$$

где $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, идущий из точки M в точку (x, y, z). Пусть, кроме того, u удовлетворяет условию $u_z - \nu u = 0$ при $z = 0$ и $\partial u / \partial n$ имеет компактный носитель на B.

Тогда

$$\nu(1 - H\nu)\int\limits_{z=0} |u|^2 dx\,dy + H\int\limits_{z=0} (|u_x|^2 + |u_y|^2)\,dx\,dy + 2\int\limits_V |\nabla u|^2 dx\,dy\,dz - $$
$$-\int\limits_B \rho\cos(\rho, n)\,|\nabla u|^2 ds = -\operatorname{Re}\int\limits_B \left(2\rho\frac{\partial \bar u}{\partial \rho} + \bar u\right)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

и, следовательно, $u \equiv 0$, если $\partial u / \partial n = 0$ на B.

Утверждение такого же типа можно получить, если условие звездности $\overline{V}$ относительно точки заменить предположением о звездности $\overline{V} \cap \{z = -d\}$ (d — любое положительное число) относительно точки $(0, 0, -d)$. Эти утверждения используются в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть область $\overline{V}$ получена из слоя $\{0 \geqslant z \geqslant -h\}$ с помощью диффеоморфизма класса C^3, тождественного в окрестности бесконечности и при $z = 0$. Пусть еще V удовлетворяет одному из сформулированных выше условий звездности.*

Тогда задача об установившихся колебаниях имеет одно и только одно решение.

Такая же теорема справедлива, если источник колебаний находится внутри жидкости или на дне. Аналогичные результаты имеют место для двумерных задач.

Рассмотрим теперь трехмерную задачу о колебаниях жидкости в канале $K = V \times \{y\colon 0 < y < l\}$, где l — положительная константа и V — область в полуплоскости $\{(x, z)\colon z < 0\}$, граница которой состоит из прямой $z = 0$ и не пересекающей ее непрерывно дифференцируемой кривой B, удаленной на конечное расстояние от $z = 0$.

Теорема 2. *Пусть $x \cos(n, x) \leqslant 0$ на B и пусть u — непрерывно дифференцируемая в $\overline{K}$, гармоническая в K функция, удовлетворяющая условиям: $u_z - \nu u = 0$ при $z = 0$, $\partial u / \partial n = 0$ на $\partial K \cap \{z < 0\}$ и такая, что*

$$\int_{z=0} |u|^2 \, dx\, dy + \int_K |\nabla u|^2 \, dx\, dy\, dz < \infty.$$

Тогда $u \equiv 0$.

Условие $x \cos(n, x) \leqslant 0$ на B исключает поднятия дна и допускает углубление. Как показывают результаты ([17]), при наличии выступа на дне однородная задача может иметь быстро убывающее на бесконечности нетривиальное решение (trapping mode, по терминологии ([14])).

2. Плоская задача о движении погруженного в жидкость тела. Пусть жидкость заполняет область $V = S \setminus \overline{D}$, где S — полоса $-h < y < 0$ $(0 < h \leqslant \infty)$ на плоскости (x, y), D — ограниченная односвязная область с границей B класса C^3, $\overline{D} \subset S$. Стационарная задача (будем называть ее задачей I) об отыскании потенциала $u(x, y)$ скоростей, вызванных телом, равномерно движущимся под свободной поверхностью жидкости, ставится следующим образом. Требуется найти функцию u, дважды непрерывно дифференцируемую в $\overline{V}$, гармоническую в V и удовлетворяющую граничным условиям

$$\partial u / \partial n = f \quad \text{на} \quad B, \quad \partial^2 u / \partial x^2 + \nu\, \partial u / \partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h, \tag{1}$$

где n — нормаль к B, направленная наружу D, $f \in C^{1,\alpha}(B)$, $0 < \alpha < 1$, $\nu = g v^{-2}$, g — ускорение свободного падения, v — скорость тела. Кроме того, требуется, чтобы градиент решения был равномерно ограничен и стремился к нулю при $x \to +\infty$. В случае бесконечной глубины жидкости $(h = \infty)$ краевое условие при $y = -h$ следует опустить.

Всюду ниже предполагается, что $x \cos(n, x) \geqslant 0$ на B. В частности, это условие выполнено, если B разбивается осью $x = 0$ на две части, допускающие явное задание: $x = g_{\pm}(y)$.

Лемма 2. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{V}$, гармоническая в V функция удовлетворяет условиям (1) и такова, что*

$$\int_{y=0} |u_x|^2 \, dx + \int_V |\nabla u|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

Пусть, кроме того, $u \in L_2(-\infty, 0)$ при любом $x = \mathrm{const}$, если $h = \infty$.

Тогда

$$2\int\limits_V |u_y|^2\,dx\,dy+\int\limits_B x\cos(n,x)\,|\nabla u|^2\,ds=\operatorname{Re}\int\limits_B(2x\bar u_x-\bar u)\,f\,ds.$$

В частности, если $x\cos(n,x)\geqslant 0$ *на* B *и* $f\equiv 0$, *то* $u\equiv\text{const}$ *при* $h<\infty$ *и* $u\equiv 0$ *при* $h=\infty$.

Это утверждение используется для доказательства формулируемых ниже теорем об однозначной разрешимости.

Теорема 3. *Пусть* $x\cos(n,x)\geqslant 0$ *на* B *и* $\nu h<1$ (*случай закритической скорости* $v>\sqrt{gh}$).

Тогда задача I *имеет одно и только одно* (*с точностью до постоянного слагаемого*) *решение при любой функции* $f\in C^{1,\alpha}(B)$.

Для изучения случая $\nu h>1$ (докритическая скорость) рассмотрим вспомогательную задачу II, которая отличается от задачи I условиями на бесконечности. Условия на ∇u заменяются «условиями излучения», которые при $h<\infty$ имеют вид

$$u(x,y)=\gamma|x|+c\operatorname{sign}x+w(x,y),$$

где γ, c — некоторые константы и

$$\sup_V|\nabla u|<\infty,\quad \lim_{r\to\infty}(\partial w/\partial|x|-i\lambda_0 w)=0.$$

Здесь λ_0 — положительный корень уравнения $\nu\,\operatorname{th}\lambda h=\lambda$. При $h=\infty$ «условия излучения» имеют вид $u(x,y)=\gamma\ln r+w(x,y)$, где γ — константа и

$$\sup_V|\nabla u|<\infty,\quad \lim_{r\to\infty}(\partial w/\partial|x|-i\nu w)=0.$$

Легко могут быть построены фундаментальные решения $E_k(z,\zeta)$, $k=1,2$, $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ задач I, II (т. е. решения соответствующих задач с источником в точке ζ внутри жидкости). Будем искать решения u_1, u_2 задач I, II в виде

$$u_k=\int\limits_B E_k(z,\zeta)\,g(\zeta)\,ds_\zeta+c,\quad k=1,2,\tag{2}$$

где $c=\text{const}$ при $k=1$, $c=0$ при $k=2$. Тогда для неизвестной плотности g получим интегральные уравнения Фредгольма (см., например, ([6]))

$$-g+T_kg=2f,\quad T_kg=2\int\limits_B\frac{\partial E_k(z,\zeta)}{\partial n_z}\,g(\zeta)\,ds_\zeta,\quad k=1,2.\tag{3}$$

Теорема 4. *Пусть* $\nu h>1$ *и* $x\cos(n,x)\geqslant 0$ *на* B.

Тогда уравнение $-g+T_2g=2f$ *однозначно разрешимо в* $C^{1,\alpha}(B)$ *при всех* $f\in C^{1,\alpha}(B)$. *Задача* II *имеет одно и только одно решение при любой функции* $f\in C^{1,\alpha}(B)$. *Это решение имеет вид*

$$u(x,y)=\pm\gamma x\pm c+\mathscr{D}_\pm\operatorname{ch}\lambda_0(y+h)\,e^{i\lambda_0|x|}+\psi_\pm(x,y),\quad x\gtrless 0,\tag{4}$$

если $h<\infty$; *и*

$$u(x,y)=\gamma\ln r+\mathscr{D}_\pm e^{\nu(y+i|x|)}+\psi_\pm(x,y),\quad x\gtrless 0,$$

если $h<\infty$. *Здесь* γ, c, $\mathscr{D}_\pm$ — *некоторые константы и* $\psi_\pm=O(r^{-1})$, $|\nabla\psi_\pm|=O(r^{-2})$ *при* $r\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть* $\nu h>1$ *и* $x\cos(n,x)\geqslant 0$ *на* B.

Тогда задача I *и уравнение* $-g+T_1g=2f$ *эквивалентны в том смысле, что любое решение задачи* I *представимо и притом однозначно в виде потенциала* (2) *при* $k=1$ *с плотностью* g, *удовлетворяющей этому интегральному уравнению; и обратно, для любого решения* g *интегрального уравнения формула* (2) *при* $k=1$ *дает решение задачи* I.

Теорема 6. *Если $\nu h > 1$ и $x \cos(n, x) \geqslant 0$ на B, то однородная задача I имеет не более одного нетривиального (с точностью до постоянного множителя и слагаемого) решения.*

Следующая теорема сводит исследование вопроса об однозначной разрешимости задачи I при $\nu h > 1$ (или, что то же самое, интегрального уравнения $-g + T_1 g = 2f$) к вычислению некоторой константы. Для ее нахождения нужно решить заведомо однозначно разрешимое уравнение

$$-g + T_2 g = 2\frac{\partial}{\partial n}[\operatorname{ch}\lambda_0 (y + h)\, e^{i\lambda_0 x}], \tag{5}$$

если $h < \infty$, или $\quad -g + T_2 g = 2\frac{\partial}{\partial n} e^{\nu(y+ix)}$, если $h = \infty$.

Теорема 7. *Пусть $x\cos(n, x) \geqslant 0$ на B, $\nu h > 1$, $h < \infty$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) *задача I имеет одно и только одно решение (с точностью до постоянного слагаемого) для любой функции $f \in C^{1,\alpha}(B)$;*

2) *для решения u задачи II с граничной функцией*

$$f = \frac{\partial}{\partial n}[\operatorname{ch}\lambda_0 (y + h)\, e^{i\lambda_0 x}]$$

константа $\mathscr{D}_+$ в асимптотике (4) не равна единице;

3) *для функции u из пункта 2 справедливо неравенство*

$$\int_B u \frac{\partial}{\partial n}[\operatorname{ch}\lambda_0 (y + h)\, e^{-i\lambda_0 x}]\, ds \neq$$

$$\neq \lambda_0^2 \int_D \operatorname{ch} 2\lambda_0 (y + h)\, dx\, dy + i\lambda_0 \left(\frac{\nu}{\nu^2 - \lambda_0^2} - h\right);$$

4) *для функции u из пункта 2 $\quad |\mathscr{D}_-| \neq 1$;*

5) *для решения g уравнения (5) справедливо неравенство*

$$\int_B g \operatorname{ch}\lambda_0 (y + h)\, e^{-i\lambda_0 x} ds \neq i\lambda_0 \left(\frac{\nu}{\nu^2 - \lambda_0^2} - h\right);$$

6) *для решения g уравнения (5)*

$$\left|\int_B g \operatorname{ch}\lambda_0 (y + h)\, e^{i\lambda_0 x} ds\right| \neq \lambda_0 \left(\frac{\nu}{\nu^2 - \lambda_0^2} - h\right).$$

Аналогичное утверждение справедливо в случае $h = \infty$.

Замечание. Для решения u задачи II из п.2) теоремы 7, константы $\mathscr{D}_+$ и $\mathscr{D}_-$ в асимптотической формуле (4) связаны равенством $|\mathscr{D}_+|^2 + |\mathscr{D}_-|^2 = 2\operatorname{Re}\mathscr{D}_+$. Следовательно, $|\mathscr{D}_-| \leqslant 1$ для любой кривой B. Таким образом, если для некоторой кривой B нет единственности решения задачи I, то $|\mathscr{D}_-|$ достигает абсолютного максимума.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ламб, Гидродинамика, М.— Л., 1947. [2] Дж. Дж. Стокер, Волны на воде, ИЛ, 1959. [3] А. А. Костюков, Сопротивление воды движению судов, Л., 1966. [4] М. В. Келдыш, Техн. заметки ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, в. 52, 5 (1935). [5] М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Тр. конф. по теории волнового сопротивления, 1937, стр. 31. [6] Н. Е. Кочин, Собр. соч., **II**, 105, 244 (1949). [7] T. H. Havelock, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **118**, № 779 (1928). [8] Л. Н. Сретенский, Тр. ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, в. 346, 1 (1938). [9] М. Д. Хаскинд, ПММ, 8, 4, 287 (1944). [10] М. Д. Хаскинд, ПММ, **9**, 1, 67 (1945). [11] М. Д. Хаскинд, ПММ, **10**, 4, 475 (1946). [12] G. Kreisel, Quart. Appl. Math., **7**, № 1, 21 (1949). [13] F. Ursell, Proc. Cambr. Phil. Soc., **46**, 1 (1950). [14] F. Ursell, Proc. Cambr. Phil. Soc., **47**, № 2, 347 (1951). [15] F. Ursell, Quart. J. Mech. Appl. Math., **7**, 4, 427 (1954). [16] F. Ursell, Proc. Cambr. Phil. Soc., **64**, 3, 811 (1968). [17] D. S. Jones, Proc. Cambr. Phil. Soc., **49**, 4, 668 (1953). [18] F. John, Comm. Pure Appl. Math., **3**, № 1, 45 (1950). [19] А. Н. Тихонов, Изв. АН СССР, ОТН, 57 (1940). [20] Н. Н. Моисеев, Сборн. Теория поверхностных волн, ИЛ, 5, 1959.