

А. С. ВОЛЬМИР, А. А. ЛОГВИНСКАЯ, В. В. РОГАЛЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 29 XII 1971)

При теоретических исследованиях нелинейных колебаний пластин и оболочек основные результаты были получены путем сведения конструкции к системе с одной⁽²⁾, реже с двумя⁽³⁾ степенями свободы. Интегрирование исходных дифференциальных уравнений проводилось в основном методом Бубнова как по пространственным, так и по временной координатам. При этом предполагалось, что колебания являются гармоническими.

В настоящей статье для свободно опертых пластин и панелей решение получено методом Бубнова — Власова в третьем (пятом) приближениях по пространственным координатам, а интегрирование по времени системы обыкновенных дифференциальных уравнений выполнено методом Рунге — Кutta.

Увеличение числа степеней свободы нелинейной системы позволило обнаружить сложный, отличный от гармонического, характер колебаний пластин и панелей при определенных значениях начальной амплитуды, размеров в плане и параметра кривизны. При этом амплитуды колебаний резко изменяются во времени, а формы изогнутой поверхности для некоторых моментов времени существенно отличаются от начальной изогнутой поверхности.

Рассмотрим прямоугольную в плане цилиндрическую панель с размерами сторон $2a$ и $2b$, толщиной h и радиусом R , находящуюся под действием равномерного статического давления p . Будем полагать, что кромки панели свободно скользят вдоль опорного контура и могут свободно искривляться, оставаясь в плоскости опорного контура. Начало координат расположим в центре панели, а оси x и y направим параллельно образующей $2a$ и вдоль дуги $2b$.

Система нелинейных уравнений, описывающих свободные колебания цилиндрической панели при конечных прогибах имеет вид⁽¹⁾

$$\nabla^4 \zeta = 12(1 - v^2) \left[\frac{1}{4} \bar{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + L(\zeta, \varphi) + \frac{1}{16\lambda^2} \bar{p} \right] - \frac{\pi^2}{16\lambda^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi = -[\frac{1}{4} \bar{k} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} L(\zeta, \zeta)], \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^4 &= \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}, \\ L(\cdot) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}. \end{aligned}$$

Границные условия свободного опирания запишем в виде

$$\zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ при } \xi = \pm 1, \quad (3)$$

$$\zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ при } \eta = \pm 1.$$

В уравнениях (1), (2), (3) ζ и φ — соответственно безразмерный прогиб и функция напряжений в срединной поверхности, $\tau = \frac{t}{T_0} = \frac{\pi h t}{(2b)^2 \sqrt{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{Eg}{\rho}}$ — безразмерное время (здесь T_0 — период основного тона линейных колебаний квадратной свободно опертой пластины, t — время).

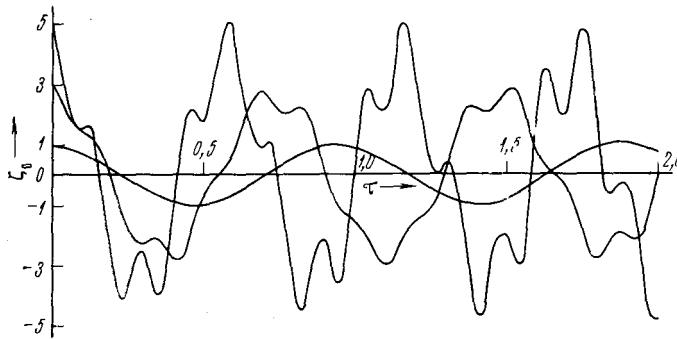


Рис. 1. Влияние начальной амплитуды на характер колебаний квадратной пластины

По поводу остальных безразмерных параметров и обозначений, используемых в работе, см. (*).

Начальные условия зададим так:

$$\zeta = Cf(\xi, \eta), \quad \partial\zeta / \partial\tau = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$

где C — начальное отклонение от положения равновесия в центре панели; $f(\xi, \eta)$ — форма изогнутой поверхности при начальном отклонении.

Функции прогиба и напряжений представим в виде рядов

$$\zeta = \sum_{ij} \zeta_{ij} \cos \frac{i\pi\xi}{2} \cos \frac{j\pi\eta}{2}, \quad (4)$$

$$\varphi = \sum_{ij} \varphi_{ij} \left[1 + (-1)^{i+j-1} \cos \frac{i+1}{2} \pi\xi \right] \left[1 + (-1)^{i+j-1} \cos \frac{j+1}{2} \pi\eta \right], \quad (5)$$

точно удовлетворяющих граничным условиям (3).

Полагая, что порождающая форма $f(\xi, \eta)$ является осесимметричной и что осевая симметрия сохраняется при колебаниях, удержим в (4), (5) по три (пять) членов ряда с нечетными индексами (1, 1; 1, 3; 3, 1; 1, 5; 5, 1). Эти выражения подставим в (1), (2) и применим процедуру Бубнова как к уравнению равновесия, так и к уравнению совместности деформаций. В результате получим систему 6 (10) уравнений, из которых 3 (5) являются уравнениями движения, а остальные — уравнениями совместности деформаций.

Интегрирование полученных уравнений проводилось на ЭЦВМ «Урал-2» методом Рунге — Кутта, причем устойчивость схемы интегрирования была обеспечена надлежащим выбором шага по времени.

Приведем некоторые результаты решения, полученные при $v = 0,3$ и $f(\xi, \eta) = \cos \frac{\pi\xi}{2} \cos \frac{\pi\eta}{2}$.

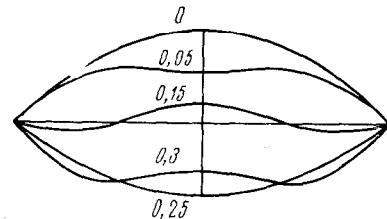


Рис. 2. Изогнутые формы пластины в различные моменты времени; цифры у кривых — значения τ

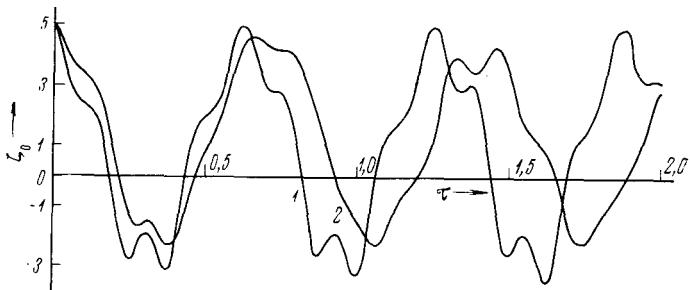


Рис. 3. Влияние кривизны квадратной панели на характер колебаний; 1 — $k = 12$, 2 — $\bar{k} = 24$

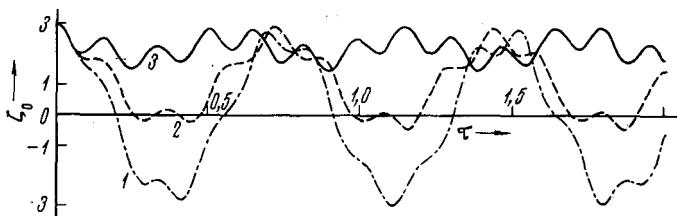


Рис. 4. Влияние поперечного статического давления на характер колебаний квадратной пластины; 1 — $\bar{p} = 0$, 2 — 50, 3 — 100

На рис. 1 приведена зависимость прогиба в центре квадратной пластины ζ_0 от параметра времени τ при различных начальных амплитудах. При $C \geq 2$ колебания перестают быть гармоническими, а форма изогнутой поверхности (рис. 2) в некоторые моменты времени существенно отличается от полуволны синусоиды.

Аналогичные результаты получены и для панелей $\bar{k} \leq 24$, колебания которых, в отличие от пластин, происходят около некоторого прощелкнутого положения равновесия (рис. 3).

Влияние статического равномерного давления \bar{p} на характер свободных колебаний квадратной пластины при $C = 3$ иллюстрирует рис. 4. В этом случае пластина совершает колебания около положения статического равновесия, а характер колебаний по-прежнему сложен.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
Свердловск

Поступило
7 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Вольмир, Устойчивость деформируемых систем, М., 1967. ² Р. И. Рабинович, Строительная механика и расчет сооружений, № 4, 21 (1968).
³ Э. И. Григолюк, ПММ, 19, № 3, 376 (1955). ⁴ А. А. Логвинская, В. В. Рогалевич, Изв. высш. учебн. завед., Строительство и архитектура, № 3, 56 (1971)