Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 518.731.343.1 МАТЕМАТИКА

Д. ЗОННЕВЕНД (ВНР)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 17 XII 1971)

В данной заметке предлагается простой метод построения управления догоняющего в одном классе игр преследования, с помощью которого можно завершить игру за конечное (но обычно не минимальное) время. Благодаря достаточной общности предположений, требуемых методом, удается в некоторых конкретных нелинейных играх получить результаты, доселе эффективно неустановленные известными методами (см. [1-5]).

1. Рассмотрим задачу преследования догоняющим объектом

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \rho u \tag{1}$$

убегающего объекта

$$\ddot{y} = g(y, \dot{y}) + \sigma v. \tag{2}$$

Здесь x и y — векторы n-мерного эвклидова пространства R^n, $u \in R^n$ и $v \in R^n$ — векторы управляющих воздействий, выбираемые из единичного шара в R^n, $f(x, \dot{x})$ и $g(y, \dot{y})$ — векторные функции такие, что решения уравнений (1) и (2) существуют, единственны и продолжаемы на любой полуинтервал $[t_0, t_1]$, каковы бы ни были начальные значения x_0, $\dot{x}_0$, y_0, $\dot{y}_0$ и измеримые вектор-функции $u(t)$, $v(t)$, $t_0 \leqslant t < t_1$, $|u(t)| \leqslant 1$, $|v(t)| \leqslant 1$, называемые управлениями соответственно догоняющего и убегающего, $\rho > \sigma$ — положительные постоянные.

Преследование считается завершенным, когда впервые выполняются равенства (причаливания)

$$x = y, \quad \dot{x} = \dot{y}. \tag{3}$$

Введем фазовые векторы объектов (1) и (2):

$$\bar{x} = (x, \dot{x}), \quad \bar{y} = (y, \dot{y}) \tag{4}$$

и в пространстве Z пар $z = (\bar{x}, \bar{y})$ обозначим через $\mathscr{M}$ многообразие выделяемое равенствами (3) (терминальное многообразие). Существенная особенность задачи построения управления догоняющего в игре преследования заключается в том, что поведение убегающего неизвестно в будущем. Догоняющий выбирает свое управление $u(t)$ в каждый момент t, исходя лишь из известных значений фазовых переменных и управлений $z(s)$, $u(s)$, $v(s)$ при $s \leqslant t$ с целью быстрее завершить преследование (см. [1]).

2. Предлагаемый метод построения управления догоняющего состоит, грубо говоря, в том, что процесс преследования разбивается на два этапа. К концу первого этапа догоняющий обеспечивает определенное соотношение (близость к $\mathscr{M}$) между своими фазовыми координатами и некоторым реализованным ранее значением фазовых координат убегающего. На втором этапе он стремится устранить образовавшуюся временную несогласованность так, чтобы в момент, когда она исчезнет, фазовые точки (которые все время «близки» к $\mathscr{M}$ при временном рассогласовании) оказались на $\mathscr{M}$. Возможность подобного метода преследования опирается на выполнимость двух предположений I и II, которые мы сформулируем здесь в несколько более общем виде, пригодном для исследования задач, в которых игроки обладают зависимой друг от друга динамикой, с произвольным терминальным многообразием $\mathscr{M}$.

Пусть

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \tag{5}$$

— начальные значения фазовых координат и пусть $\mathscr{M}_\varepsilon$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon^* < 1$, некоторое семейство многообразий из Z, причем $\mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{M}$.

Предположение I (управляемость). Пусть существуют числа ε_0, τ_0, T_0, удовлетворяющие условиям $|\varepsilon_0| < \varepsilon^*$, $0 \leqslant \tau_0 < T_0$, такие, что, какого бы ни было управление $v(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau_0$, догоняющий может так построить свое управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$, используя в каждый момент t лишь значения $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(s)$, $v(s)$, $s \leqslant \tau_0$, $s \leqslant t$, что для определяемых этими управлениями фазовых движений с начальными условиями (5) выполнено включение

$$(\bar{x}(T_0), \; \bar{y}(\tau_0)) \in \mathscr{M}_{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Замечание 1. Если дополнительно требовать $\tau_0 = 0$, то предположение I никакого игрового характера не имеет. Мы допускали $\tau_0 \geqslant 0$ для общности, что может оказаться существенно полезным, в частности, в играх с неразделенной динамикой.

Предположение II (локальное превосходство догоняющего). Пусть существуют дифференцируемая функция $\tau(t)$, $t \geqslant 0$, и зависящие от нее числа t^*, удовлетворяющие условиям $\tau(0) = \tau_0$, $\dot{\tau}(0) = 1 + \varepsilon_0$;

$$\tau(t) < T_0 + t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t^*, \quad 1 - \varepsilon^* < \dot{\tau}(t) < 1 + \varepsilon^*; \tag{7}$$

$$\tau(t^*) = T_0 + t^* \tag{8}$$

и такие, что, каково бы ни было управление $v(s)$, $\tau \leqslant s < \infty$, убегающего, догоняющий может так построить свое управление $u(T_0 + t)$, $0 \leqslant t < \infty$, используя в каждый момент времени $T_0 + t$ лишь значения $\bar{x}(T_0 + t)$, $\bar{y}(\tau(t))$ и $v(\tau(t))$, что для определяемых этими управлениями фазовых движений $x(T_0 + t)$, $0 \leqslant t < \infty$, и $y(s)$, $\tau_0 \leqslant s < \infty$ для всех $t \geqslant 0$ выполнено

$$(\bar{x}(T_0 + t), \; \bar{y}(\tau(t))) \in \mathscr{M}_{(\dot{\tau}(t) - 1)}. \tag{9}$$

Замечание 2. Когда предположения I, II выполняются, из (8) следует, что всегда можно обеспечить (6) и для позитивных ε_0 (конечно, может быть, только при другом τ_0), но следует использовать условие $|\varepsilon_0| < \varepsilon^*$ для общности метода, потому что проверки условий I и II, хотя и связаны (через ε_0), но требуют различных средств. В случае $\varepsilon^* = \varepsilon_0 > 0$ проще всего попытаться удовлетворить (7), (8), подбирая квадратичную функцию $\tau(t)$

$$\tau_{\varepsilon_0}(t) = \tau_0 + (1 + \varepsilon_0)\, t - \frac{\varepsilon_0^2}{4(T_0 - \tau_0)}\, t^2,$$
$$0 \leqslant t \leqslant t^* = 2(T_0 - \tau_0)/\varepsilon_0. \tag{10}$$

Теорема. *При выполнении предположений* I *и* II *игра преследования, начинающаяся из* $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, *может быть закончена в момент* $T_0 + t^*$, *причем причаливание может быть обеспечено и во все последующие моменты.*

3. Определяющим элементом предполагаемого метода преследования является выбор (конструкция) семейства многообразий $\mathscr{M}_\varepsilon$. В задачах типа (1) — (3) они могут быть определены в виде

$$\mathscr{M}_\varepsilon = \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \,|\, x = y, \quad \dot{x} = \dot{y}(1 + \varepsilon)\}. \tag{11}$$

Из «желаемого» соотношения $x(T_0 + t) = y(\tau(t))$ получаем

$$\dot{x}(T_0 + t) = y_\tau'(\tau(t))\dot{\tau}(t), \tag{12}$$

$$\ddot{x}(T_0 + t) = y_\tau'(\tau(t))\ddot{\tau}(t) + y_{\tau\tau}''(\tau(t))\,(\dot{\tau}(t))^2. \tag{13}$$

В свою очередь, соотношения (12), (13) при фиксированном ε для задач (1) — (3) эквивалентны (9), (11). Рассмотрим два класса игр типа (1) — (3), где удается удовлетворить предположениям I, II.

Игра 1. Однотипные объекты в потенциальном поле сил

$$f(x, \dot{x}) = F(x), \quad g(y, \dot{y}) = F(y), \tag{14}$$

где $F(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, для простоты равномерно ограниченная по модулю на R^n постоянной C, являющаяся градиентом некоторой (потенциальной) функции. Для выполнения первого предположения нам достаточно наложить следующие условия на начальные значения $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$. Пусть существует момент времени $T_0' \geqslant 0$ и подходящее допустимое управление $u(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant T$ такое, что для некоторого ε^* (удовлетворяющего (18)) выполняется

$$(x(T_0'),\ \dot{x}(T_0')) \text{ и } (y(0),\ \dot{y}(0)(1+\varepsilon_0)), \qquad |\varepsilon_0| < \varepsilon^*, \tag{15}$$

принадлежат одному и тому же компактному инвариантному связному множеству $K(\varepsilon^*)$ в фазовом пространстве механической системы $\ddot{x} = F(x)$. Из результатов работы ([7]) следует, что существует момент времени T_0'', зависящий только от $K(\varepsilon^*)$, такой, что для момента $T_0 = T_0' + T_0''$ выполняется (6) при $\tau_0 = 0$. Без нарушения общности можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon^*)$ является монотонно неубывающей функцией от ε^*.

Выполнимость предположения II мы докажем, выбирая функцию $\tau(t)$ следующим образом (ε^* определяется из (18)):

$$\dot{\tau}(0) = 1 + \varepsilon_0, \quad \ddot{\tau}(t) = -\varepsilon'' > 0 \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant t_1\ (\varepsilon_0,\ T_0(\varepsilon^*)),$$
$$\ddot{\tau}(t) = \varepsilon'' < 0 \text{ для } t_1 < t \leqslant t^*, \text{ где } \varepsilon'' = -{}^1\!/_4\varepsilon^{*2}/(T_0(\varepsilon^*) - \tau_0).$$

Для этой функции имеет место оценка

$$T_0 + t^* \leqslant 4\left(T_0(\varepsilon^*) + \frac{2T_0(\varepsilon^*)}{\varepsilon^*}\right)(\varepsilon^*)^{-1} = 2T_0(\varepsilon^*)\,\frac{\varepsilon^* + 2}{\varepsilon^*}. \tag{16}$$

Ввиду того, что, по способу построения, $|\ddot{\tau}(t)|$ — постоянная, при $|\dot{y}(0)| \leqslant L_1$, на основе (2) и (14), получаем для $t \leqslant t^*$

$$|\ddot{\tau}(t)\,y'(\tau(t))| \leqslant |\ddot{\tau}(t)|\,(L_1 + (C+\sigma)(1+\varepsilon^*)t),$$
$${}^1\!/_4\varepsilon^{*2} / (T_0(\varepsilon^*) - \tau_0) = |\ddot{\tau}(t)| \leqslant 3\varepsilon^* / t^*. \tag{17}$$

На основе (17), (13) и (14) для разрешимости (9) получим условие

$$\rho > \sigma(1+\varepsilon^*)^2 + (\varepsilon^{*2} + 2\varepsilon^*)C + L\frac{\varepsilon^{*2}}{4\,(T_0(\varepsilon^*) - \tau_0)} + (C+\sigma)\,3\varepsilon^*(1+\varepsilon^*). \tag{18}$$

Это неравенство для ε^* имеет решение, если $\rho > \sigma$.

Используя метод работы ([8]) можно показать, что убегание $x(t) \neq y(t)$ возможно из всех начальных положений, если $\rho < \sigma$ и $|\partial f^i / \partial x_j| < C_1$, $i, j = 1, \ldots, n$.

В качестве примера (14) можно рассмотреть задачу преследования в гравитационном поле с фазовыми ограничениями

$$F(x) = -\gamma m M x / |x|^3, \qquad |x|,\ |y| \geqslant r_0, \tag{19}$$

где γ, m, M, r_0 — положительные постоянные.

Заметим прежде всего, что, поскольку фазовое ограничение для x и y одинаково, оно при данном методе не представляет, как обычно, дополнительной трудности, в проверке (9) оно исключается. Для проверки (6) заметим, что компактные инвариантные связные множества K могут быть выделены с помощью первых интегралов энергии $E(x, x)$ и момента импульса $H(x, \dot{x})$ ($(\cdot \wedge \cdot)$ — символ «векторного» произведения):

$$E(x, \dot{x}) = {}^1\!/_2 m|\dot{x}|^2 - \gamma m M/|x|, \qquad H(x, \dot{x}) = m(x \wedge \dot{x}). \tag{20}$$
$$K = \{(x, \dot{x}) \mid -\infty < E_2 \leqslant E(x, \dot{x}) \leqslant E_1 < 0,\ 0 < H_1 \leqslant |H(x, \dot{x})| \leqslant H_2 < \infty\}.$$

Заметим, что при $r(E, H) = |H|^2\left(\gamma M + \sqrt{\gamma M + \frac{2}{m}E|H|^2}\right)^{-1}$ $|x| \geqslant r(E_1, H_1)$ для $(x, \dot{x}) \in K$. Если $E(y_0, \dot{y}_0) = 0$, то включение $(y_0, \dot{y}_0(1+\varepsilon_0)) \in K$ возможно лишь при отрицательном ε_0. Кроме того, в данном примере легко видеть, что предположение I выполнимо для любых начальных значений $(x_0, \dot{x}_0)$, y_0, $\dot{y}_0$, для которых $r(E, H) \geqslant r_0$ (т. е. убегающий момент вначале находится на гиперболической орбите $E(y_0, \dot{y}_0) > 0$).

Игра 2. Контрольный пример ([1]) с причаливанием

$$f(x, \dot{x}) = -\alpha\dot{x}, \quad g(y, \dot{y}) = -\beta\dot{y}, \tag{21}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — фиксированные постоянные

$$\rho/\alpha > \sigma/\beta, \qquad \rho/\sigma > (2 - \alpha/\beta). \tag{22}$$

из которых следует $\rho > \sigma$. Второе неравенство (22) суть дополнительное условиям работы ([1]) требование, связанное с тем, что догоняющий может, при его выполнении, иметь совпадение скоростей $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$ и для всех $t > t^*$.

Каковы бы ни были начальные значения (5) в игре 2, условия (22) достаточны, чтобы удовлетворить предположениям I и II.

Для доказательства заметим, что, каково бы ни было управление $v(s)$, $s \geqslant 0$, для каждого $\delta > 0$ существует такой момент τ_0, что для всех $t \geqslant \tau_0$

$$|\dot{y}(t)| < \sigma / \beta + \delta. \tag{23}$$

Поэтому догоняющий может обеспечить (6), пользуясь кусочно-постоянным управлением. Чтобы удовлетворить (9), догоняющий в каждый момент $T_0 + t$ должен выбирать $u(T_0 + t)$ по формуле

$$u(T_0 + t) = \frac{\sigma}{\rho}\, \dot{\tau}(t) \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} - \dot{\tau}(t) \right) y_\tau''(\tau(t)) \frac{\beta}{\sigma} + v(\tau(t))\, \dot{\tau}(t) \right] + \\ + \frac{1}{\rho} y_\tau'(\tau(t))\, \ddot{\tau}(t). \tag{24}$$

Мы можем пользоваться функцией $\tau_{\varepsilon_0}(t)$ из (10).

Заметим, что игру 2 можно рассматривать данным методом и тогда, когда объекты (21) движутся в римановом пространстве (придав уравнениям (21) инвариантный смысл). Полученная уже нелинейная задача решается таким же образом.

4. Остановимся коротко на рассмотрении некоторых свойств данного метода преследования. Предположение II выражает некоторую устойчивость терминального многообразия и требует небольшого усиления того свойства $\mathcal{M}$, что однажды реализованная поимка может быть сохранена, поддержана. Кроме этого условия, применимость метода зависит от степени взаимосвязанности динамики игроков. Локализация, дающая возможность избегать трудностей, связанных с нелинейностями, стала возможной благодаря наличию памяти у догоняющего (или возможностью расспроса о прошлом, наличию следов).

Другим хорошим свойством метода является то, что для его применения догоняющий не должен знать точную динамику убегающего, т. е. функцию $g(y, \dot{y}, v)$; важно только, чтобы его превосходство — выполнимость (9) — было гарантировано, с некоторой известной ему функцией $\tau(t)$ и он знал в момент $T_0 + t$ траекторию $y(\tau(s))$ для $t \leqslant s \leqslant t + \delta(t)$, где $\delta(t)$ может быть произвольно малой.

В природе можно наблюдать аналогичный данному методу процесс: в индивидуальном развитии высшего животного тот путь, по которому развивались его предки, проходится гораздо быстрее.

Автор выражает благодарность П. Б. Гусятникову и М. С. Никольскому за ценные советы при оформлении статьи.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Вычислительный центр
Венгерской Академии наук
Будапешт

Поступило
15 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, **21**, в. 4 (130), 219 (1966). [2] Л. С. Понтрягин, ДАН, **174**, № 1, 27 (1967). [3] Л. С. Понтрягин, ДАН, **175**, № 4, 764 (1967). [4] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, **196**, № 2, 278 (1971). [5] Б. Н. Пшеничный, Автоматика и телемеханика, № 1, 65 (1968). [6] Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., 1967. [7] L. Marcus, R. Sell, Arch. Rat. Mech. and Anal., **31**, № 4, 27 (1968). [8] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Дифференциальные уравнения, **7**, № 3, 436 (1971).