Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 517.934 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

П. М. ГУСЕЙНОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 26 VII 1971)

В задачах с малым параметром при старшей производной часто встречаются случаи, когда формальные асимптотические разложения содержат особенности степенного характера. Регуляризация таких разложений с помощью погранслойных поправок экспоненциального типа ([1]) оказывается невозможной, поскольку нарушаются существенные для метода ([1]) условия гладкости коэффициентов уравнения и регулярности вырождения. Изученные ранее примеры указывают на то, что погранслойные поправки следует выбирать из более содержательных классов, включающих функции типа степенного погранслоя ([2–4]).

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для уравнений второго порядка, в которых упомянутые требования гладкости коэффициентов и регулярности вырождения не выполняются в отдельных точках. Показано, что регуляризующие поправки в этих случаях могут быть получены в виде произведений функций «быстрого» аргумента на функцию исходного независимого переменного (мультипликативное расщепление, см. ([5])).

1. Пусть требуется найти решение $y_\varepsilon(x)\in C[0,1]\cap C^\infty(0,1]$ краевой задачи A_ε:

$$L_\varepsilon y_\varepsilon\equiv\left(\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}+L_0\right)y_\varepsilon\equiv\varepsilon y_\varepsilon''+a(x)\,y_\varepsilon'+b(x)\,y_\varepsilon=x^{-\alpha-1}f(x), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=y_\varepsilon(1)=0, \tag{2}$$

$0\leqslant x\leqslant 1$; функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)\in C^\infty[0,1]$; $a(x)>0$, $f(0)\neq 0$; α — параметр, $0<\alpha<1$; ε — малый параметр; кроме того, положим $a(0)=1$.

Обозначим $\omega_{\alpha+k}$, $k=0,1,2,\ldots$, класс функций $u(t)$, $t^{\alpha+k-1}u(t)\in C^\infty[0,\infty]$, имеющих при $t\to\infty$ асимптотическое представление

$$u(t)\sim t^{-\alpha-k}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j t^{-j}.$$

Числа β_j называются коэффициентами асимптотического разложения функции $u(t)$ в классе $\omega_{\alpha+k}$.

Отметим некоторые очевидные свойства функций $u(t)\in\omega_{\alpha+k}$:

а) класс $\omega_{\alpha+k}$ образует линейное множество;

б) $t^l u(t)\in\omega_{\alpha+k-l}$ при $0\leqslant l\leqslant k$;

в) $du/dt\in\omega_{\alpha+k+1}$.

Лемма. *Решение задачи*

$$M_0u\equiv d^2u/dt^2+du/dt=h(t),\quad u(0)=u(\infty)=0$$

с правой частью $h(t)\in\omega_{\alpha+k+1}$ *есть функция класса* $\omega_{\alpha+k}$.

Примером функции класса ω_α может служить решение задачи $M_0u_0=t^{-\alpha-1}$, $u(0)=u(\infty)=0$.

Введем обозначения ($t=x/\varepsilon$): $U_0(t)\equiv t^{-\alpha-1}$, $W_0(x)\equiv f(x)$; функции $U_n(t)$, $U_{n,i}(t)\in\omega_{\alpha+1}$; $u_n(t)\in\omega_\alpha$; $w_n(x)$, $W_{n,i}(x)\in C^\infty[0,1]$; $n=1,2,\ldots$

Рассмотрим задачу:

$$L_\varepsilon z_n = \varepsilon^{n-\alpha-1} W_n(x) U_n(t), \quad z_n(0, \varepsilon) = z_n(1, \varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Положим $z_n(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n-\alpha-1} w_n(x) u_n(t) + z_{n+1}(x, \varepsilon)$ и выберем $w_n(x)$, $u_n(t)$ так, чтобы уравнение для $z_{n+1}(x, \varepsilon)$ сохранило вид (3) с заменой индекса невязки n на $n+1$.

Действительно, в выражении

$$L_\varepsilon (w_n u_n) \equiv \varepsilon^{-1} (M_0 u_n) w_n(x) + u_n(t) L_0 w_n + \bar{a}_1(x) w_n(x) t \frac{du_n}{dt} + $$
$$+ 2w_n'(x) \frac{du_n}{dt} + \varepsilon w_n''(x) u_n(t),$$

где $\bar{a}_1(x)$ определяется соотношением $a(x) = a(0) + x\bar{a}_1(x)$, положим

$$M_0 u_n = U_n(t), \quad u_n(0) = u_n(\infty) = 0. \tag{4}$$

В силу отмеченных выше свойств а), б), в), $\alpha u_n(t) + t\, du_n/dt \equiv \equiv \bar{u}_n(t) \in \omega_{\alpha+1}$. Отсюда $\alpha u_n(t) \equiv \bar{u}_n(t) + t \frac{d^2 u_n}{dt^2} - \frac{x}{\varepsilon} M_0 u_n$. Следовательно,

$$L_\varepsilon (w_n u_n) \equiv \varepsilon^{-1} M_0 u_n L_0^{(1)} w_n + \frac{1}{\alpha}\left(\bar{u}_n(t) + t \frac{d^2 u_n}{dt^2}\right) L_0 w_n -$$
$$- \bar{a}_1(x) w_n(x) t \frac{d^2 u_n}{dt^2} + 2w_n'(x) \frac{du_n}{dt} + x w_n''(x) \frac{u_n(t)}{t},$$

где

$$\alpha L_0^{(1)} w_n \equiv -x a(x) w_n' + (\alpha a(x) - x b(x)) w_n.$$

Решая задачу

$$L_0^{(1)} w_n = W_n(x), \quad w_n(1) = 0, \tag{5}$$

получим для $z_{n+1}(x, \varepsilon)$ уравнение вида (3), где n заменено на $n+1$.

Теорема. *Пусть $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in C^\infty[0, 1]$; $a(x) > 0$, $f(0) \neq 0$. Тогда решение задачи* (1), (2) *имеет асимптотическое представление при любом N*:

$$y_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\alpha} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \sum_{i=0}^{4^n-1} w_{n,i}(x) u_{n,i}(t) + O(\varepsilon^{N+1-\alpha}),$$

где функции $u_{n,i}(t) \in \omega_\alpha$, $w_{n,i}(x) \in C^\infty[0, 1]$ определяются соответственно из рекуррентных соотношений (4), (5).

2. Рассмотрим задачу A_ε:

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \left(\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + L_0\right) y_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 y_\varepsilon'' + x a(x) y_\varepsilon' + (\lambda + x b(x)) y_\varepsilon = f(x), \tag{6}$$

$$y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1) = 0, \tag{7}$$

содержащую, помимо малого параметра $\varepsilon > 0$, спектральный параметр $\lambda > 0$; предполагается, по-прежнему, что $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in C^\infty[0, 1]$; $a(x) > 0$, $a(0) = 1$.

Обозначим через R множество значений $\lambda > 0$, удовлетворяющих неравенствам $|2n - \lambda| \geqslant \rho > 0$, где ρ не зависит от λ, n, ε; $n = 1, 2, \ldots$ Справедлива

Теорема. *Собственные значения задачи* (6), (7) *при достаточно малых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, не содержатся в множестве R. Имеют место следующие оценки*:

$$\max |y_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon^{-\lambda} K \max |f(x)| \quad \textit{при } \lambda \in R,$$
$$\max |y_\varepsilon(x)| \leqslant |\ln \varepsilon| K \max |f(x)| \quad \textit{при } \lambda = 0,$$

где K не зависит от x, ε.

Назовем ω_∞ класс функций $v(t) \in C^\infty[0, \infty]$ типа экспоненциального погранслоя ([1, 4]); $\bar{\omega}_{\lambda+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — класс функций $u(t) \in C^\infty[0, \infty]$, имеющих асимптотическое представление $u(t) \sim t^{-\lambda-k} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j t^{-2j}$ при $t \to \infty$.

Функции класса $\bar{\omega}_{\lambda+k}$ также обладают отмеченными в п. 1 свойствами а), б), в). Заметим, что при $\lambda \in R$ «погранслойное» уравнение $M_0 y(t) \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + t\frac{d}{dt} + \lambda\right) y(t) = 0$ имеет два линейно независимых решения $v_0(t) \in \omega_\infty$, $u_0(t) \in \bar{\omega}_\lambda$, причем $v_0(0) \neq 0$, $u_0(0) = 0$; более подробно:

$$v_0(t) = \exp(-{}^1/{}_2 t^2) H_{\lambda-1}(t/\sqrt{2}) \in \omega_\infty,$$

$$u_0(t) = C \exp(-{}^1/{}_2 t^2)\,[H_{\lambda-1}(0) G_{\lambda-1}(t/\sqrt{2}) - G_{\lambda-1}(0) H_{\lambda-1}(t/\sqrt{2})] \in \bar{\omega}_\lambda,$$

где $H_{\lambda-1}(t/\sqrt{2})$, $G_{\lambda-1}(t/\sqrt{2})$ — функции Эрмита соответственно первого и второго рода [5], C — константа, выбранная из условия нормировки $\left.\frac{du_0}{dt}\right|_0 = 1$.

Лемма. *При $\lambda \in R$ решение уравнения $M_0 u = h$ при условиях*

$$u(0) = 0, \qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_0 = \int\limits_0^\infty \exp({}^1/{}_2 s^2)\, v_0(s)\, h(s)\, ds \tag{8}$$

и правой части $h(t) \in \bar{\omega}_{\lambda+k+1}$ (или ω_∞), $k = 0, 1, 2, \ldots$, есть функция того же класса $\bar{\omega}_{\lambda+k+1}$ (или ω_∞).

Введем обозначения: $u_n(t)$, $u_{n,i}(t)$, $U_{n,i}(t)\ \bar{\omega}_{\lambda+n}$; $\bar{w}_n(x)$, $\overline{W}_n(x)$, $w_{n,i}(x)$, $W_{n,i}(x) \in C^\infty[0, 1]$; $v_n(t) \in \omega_\infty$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\overline{W}_0(x) \equiv f(x)$, $U_{0,i}(t) \equiv 0$.

При всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место следующее представление:

$$L_\varepsilon(w_n u_n) \equiv a(x) w_n(x) M_0 u_n(t) + x u_n(t) L_0^{(1)} w_n(x) + \\ + \varepsilon \bar{a}_1(x) w_n(x)\, t \frac{d^2 u_n}{dt^2} + 2\varepsilon w_n'(x) \frac{du_n}{dt} + \varepsilon x w_n''(x) \frac{u_n(t)}{t}, \tag{9}$$

где $L_0^{(1)} w_n \equiv a(x) \dot{w}_n + (b(x) - \lambda \bar{a}_1(x)) w_n$. Полагая (в силу свойств а), б), в) классов $\bar{\omega}_{\lambda+n}$) $t\frac{du_n}{dt} + (\lambda + n) u_n \equiv \bar{u}_{n+2}(t) \in \bar{\omega}_{\lambda+n+2}$, $n u_n(t) \equiv \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \bar{u}_{n+2} - M_0 u_n$, преобразуем выражение (9) к виду, удобному при $n > 0$:

$$L_\varepsilon(w_n u_n) \equiv \frac{1}{n} M_0 u_n L_0^{(2)} w_n + \frac{\varepsilon}{n} t \left(\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \bar{u}_{n+2}(t)\right) L_0^{(1)} w_n - \\ - \varepsilon \bar{a}_1(x) w_n(x)\, t \frac{d^2 u_n}{dt^2} + 2\varepsilon w_n'(x) \frac{du_n}{dt} + \varepsilon x w_n''(x) \frac{u_n(t)}{t}, \tag{10}$$

где $L_0^{(2)} w_n = -x a(x) w_n' + (n a(x) - x b(x) + \lambda \bar{a}_1(x)) w_n$.

Докажем лемму индукции. Пусть

$$L_\varepsilon z_n(x, \varepsilon) = \varepsilon^{2n} \overline{W}_n(x) + \varepsilon^{n-\lambda} W_{n,i}(x) U_{n,i}(t), \qquad z_n(1, \varepsilon) = B_n \varepsilon^{2n+2} \tag{11}$$

(индекс i означает сумму 4^n членов одинакового вида, B_n не зависит от x, ε). Положим $z_n = \varepsilon^{2n} \bar{w}_n(x) + \varepsilon^{n-\lambda} w_{n,i}(x) u_{n,i}(t) + z_{n+1}(x, \varepsilon)$ и покажем, что можно выбрать функции $\bar{w}_n(x)$, $w_{n,i}(x)$, $u_{n,i}(t)$ так, чтобы индекс n невязки увеличился на единицу.

Определим искомые функции как решения следующих задач:

$$L_\varepsilon \bar{w}_n = \overline{W}_n(x), \qquad \lambda \bar{w}_n(0) = \overline{W}_n(0); \tag{12}$$

$M_0 u_{n,\varepsilon} = U_{n,i}(t)$ при условиях (8), если $n > 0$; при условиях

$$u_0(0) = 0, \quad \left.\frac{du_0}{dt}\right|_0 = 1, \text{ если } n = 0; \tag{13}$$

$$L_0^{(2)} w_{n,i} = nW_{n,i}(x),\ w_{n,i}(1)\,\beta_0^{n,i} + \overline{w}_n(1) = B_n, \tag{14}$$

$\beta_0^{n,i}$ — старшие коэффициенты функций $u_{n,i}(t)$ в классе $\overline{\omega}_{\lambda+n}$. (При $n = 0$ $L_0^{(2)} \equiv L_0^{(1)}$).

Последние четыре члена в представлении (10) вместе с членом $\varepsilon^{2n+2}\overline{w}_n''(x)$, порожденным задачей (12), образуют невязку следующего приближения; содержащиеся в ней функции $U_{n+1,i}(t)$ принадлежат классу $\overline{\omega}_{\lambda+n+1}$.

Для того чтобы удовлетворить левому граничному условию, можно, например, построить итерационный процесс по функциям $v_n(t) \in \omega_\infty$ по методу работы ([1]). Тем самым доказана

Теорема. *Пусть* $a(x), b(x), f(x) \in C^\infty[0, 1]$; $a(x) > 0$.

Тогда решение задачи (6), (7) *при* $\lambda \in R$ *имеет асимптотическое представление при любом* N:

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{N} \left[\varepsilon^{2n}(\overline{w}_n(x) + v_n(t)) + \varepsilon^{-\lambda+n} \sum_{i=0}^{4^n-1} w_{n,i}(x)\, u_{n,i}(t)\right] + O(\varepsilon^{N+1-\lambda}),$$

где функции $\overline{w}_n(x)$, $w_{n,i}(x) \in C^\infty[0, 1]$; $u_{n,i}(t) \in \overline{\omega}_{\lambda+n}$ *определяются соответственно из рекуррентных соотношений* (12), (14), (13); $v_n(t)$ — *функции экспоненциального погранслоя, определяемые обычным способом* ([1]).

Автор выражает глубокую признательность Л. А. Чудову за постановку задач и внимание к работе.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, 5 (1957). [2] С. А. Ломов, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, 525 (1966). [3] С. А. Ломов, ДАН, 177, 6 (1967). [4] П. М. Гусейнов, Тр. вычислит. центра МГУ. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 2, М., 1971. [5] Э. Я. Риекстыньш, Уч. зап. Латв. унив., 8, 2 (1956).