

А. Д. ИОФФЕ

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 29 XII 1971)

1°. В классических теоремах Тоннели (1), Нагумо (2) и Макшейна (3), гарантирующих существование абсолютно непрерывного решения задачи

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x \in R^n, \quad (2)$$

и различных их обобщениях, данных в (4, 5) и других работах, в более или менее явной форме предполагается ограниченность снизу подынтегральной функции f . Такое предположение вполне приемлемо, если множество допустимых значений x ограничено по условию задачи. В общем случае, требование ограниченности f снизу исключает из рассмотрения многие важные задачи, например, задачи для интегралов вида $\int (|\dot{x}|^m - |x|^k) dt$. В некоторых работах это требование было ослаблено. Например, Олех ((5), теорема 2) разрешает f убывать по x (при фиксированных $t, \dot{x}$), но не быстрее линейной функции.

Мы доказываем здесь теорему существования, в которой f может убывать по x с любой скоростью, но при этом убывание по x и рост по $\dot{x}$ согласованы некоторым образом. Эта теорема содержит большинство цитированных результатов и вместе с тем охватывает упоминавшиеся задачи для функционалов вида $\int (|\dot{x}|^m - |\dot{x}|^k) dt$. Мы увидим далее, что оценки роста и убывания f , участвующие в формулировке теоремы (условие 5г), являются в известном смысле точными и не могут быть ослаблены.

2°. Мы будем рассматривать задачи типа (1), (2), но для функций весьма общего вида. Именно, мы будем предполагать, что

1) $f(t, x, y)$ отображает $[t_0, t_1] \times R^n \times R^n$ в $(-\infty, \infty]$, т. е. значение ∞ допускается наравне с вещественными числами;

2) f есть борелевская функция относительно σ -алгебры, порожденной всеми множествами вида $\Delta \times A$, где Δ — измеримое подмножество $[t_0, t_1]$, а A — борелевское подмножество $R^n \times R^n$;

3) f полунепрерывна снизу по x, y при каждом $t \in [t_0, t_1]$;

4) f выпукла по y при каждом $t \in [t_0, t_1], x \in R^n$.

Условие 1) эквивалентно допущению разного рода ограничений на x и $\dot{x}$. Благодаря ему, схемой (1), (2) охватываются и задачи оптимального управления с различными ограничениями (см. п. 5°). Условие 2) носит в основном технический характер, однако в силу своей чрезвычайной общности оно не накладывает практически никаких ограничений на класс рассматриваемых задач. Условия 3) и 4) обеспечивают полунепрерывность снизу функционала (1) в естественных функциональных пространствах.

Условий 1) — 4) недостаточно для доказательства существования решения в задаче (1), (2). Необходимы еще дополнительные условия, ха-

рактически рост f по x и y . Мы будем предполагать, что

5) при всех $x, y \in R^n$ и почти всех $t \in [t_0, t_1]$ *

$$f(t, x, y) \geq \varphi(|y|) - \psi(|x|) + r(t), \quad (3)$$

где

5а) φ — неотрицательная выпуклая функция на $[0, \infty)$ и $\varphi(0) = 0$;

5б) ψ — неотрицательная непрерывная и неубывающая функция на $[0, \infty)$;

5в) $\lambda^{-1}\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$;

5г) $\varphi\left(\frac{2\lambda}{t_1 - t_0}\right) - \psi(\lambda_0 + \lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, где $\lambda_0 = \max(|x_0|, |x_1|)$;

5д) $r(t)$ суммируема на $[t_0, t_1]$.

Именно условие 5г) является решающим. В нем согласуется скорость убывания по x со скоростью роста по y . Остальные условия встречались и раньше. Ситуация, рассмотренная в большинстве цитированных работ, соответствует случаю $\psi \equiv 0$. В статье (5), теорема 2, предполагается по существу, что $\psi(\lambda) = c\lambda$ ($c > 0$).

Теорема 1. Пусть интегрант $f(t, x, y)$ удовлетворяет условиям 1)–5).

Тогда, если хотя бы для одной абсолютно непрерывной функции $x(t)$, удовлетворяющей условиям (2), интеграл (1) конечен, то задача (1), (2) имеет решение в классе абсолютно непрерывных функций.

3°. Проиллюстрируем эту теорему на примере простейшей задачи с интегрантом $f(t, x, y) = |y|^m - |x|^k$, $m, k > 1$. При $k > m$ f не удовлетворяет условиям теоремы (не выполнено условие 5г)). Хорошо известно, однако, что в этом случае нижняя грань в задаче (1), (2) равна $-\infty$, и, следовательно, решения не существует. При $m > k$ из теоремы следует существование решения для всяких t_0, t_1, x_0, x_1 . Наконец, если $m = k$, теорема гарантирует существование решения при $t_1 - t_0 < 2$. С другой стороны, легко показать, что при $t_1 - t_0 > 2$ найдется столь большое число m , что нижняя грань в задаче (1), (2) при $f = |y|^m - |x|^m$ равна $-\infty$. Таким образом, условие 5г) не может быть ослаблено.

4°. Наметим план доказательства теоремы. Оно базируется на двух основных леммах.

Лемма 1. Пусть функции φ и ψ удовлетворяют условиям 5а)–5г). Тогда для всяких $c > 0$, $T > 0$, $T \leq t_1 - t_0$ множество $A(c, T)$ абсолютно непрерывных функций $x(t)$ таких, что

$$\int_0^T (\varphi(|\dot{x}(t)|) - \psi(|x(t)|)) dt \leq c, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

компактно в сильной топологии $C_{[t_0, t_1]}^n$.

Доказательство леммы строится по следующей схеме. Рассмотрим функцию

$$\omega(c, t) = \sup \{ \lambda \geq 0 \mid t\varphi(t^{-1}\lambda) - t\psi(\lambda_0 + \lambda) \leq c \}$$

($c > 0, t > 0$). Нетрудно проверить, что $\omega(c, t) \geq 0$, конечна при $t \leq \frac{1}{2}(t_1 - t_0)$ (в силу 5г)), не убывает (в силу 5а) и 5б)) и $\omega(c, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ (в силу 5а) и 5в)).

Пусть $x(t) \in A(c, T)$. Положим

$$\gamma_0(x) = \int_0^{T/2} |\dot{x}(t)| dt, \quad \gamma_1(x) = \int_{T/2}^T |\dot{x}(t)| dt.$$

* $|x|$ — эвклидова норма вектора $x \in R^n$.

Используя интегральное неравенство Иенсена и монотонность ψ , нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} c &\geq \int_0^T (\varphi(|\dot{x}|) - \psi(|x|)) dt = \int_0^{T/2} (\varphi(|\dot{x}|) + \psi(|x|)) dt + \\ &+ \int_{T/2}^T (\varphi(|\dot{x}|) - \psi(|x|)) dt \geq \frac{T}{2} \left(\varphi\left(\frac{2}{T} \gamma_0(x)\right) - \psi(|x_0| + \gamma_0(x)) \right) + \\ &+ \frac{T}{2} \left(\varphi\left(\frac{2}{T} \gamma_1(x)\right) - \psi(|x_1| + \gamma_1(x)) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $\inf \left\{ \varphi\left(\frac{2}{T} \gamma\right) - \psi(\lambda_0 + \gamma) \mid \gamma > 0 \right\} > -\infty$, из (4) следует существование таких чисел $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, что

$$\begin{aligned} c_0 &\geq \frac{T}{2} \left(\varphi\left(\frac{2}{T} \gamma_0(x)\right) - \psi(\lambda_0 + \gamma_0(x)) \right), \\ c_1 &\geq \frac{T}{2} \left(\varphi\left(\frac{2}{T} \gamma_1(x)\right) - \psi(\lambda_0 + \gamma_1(x)) \right) \end{aligned}$$

для всех $x(t) \in A(c, T)$. Поэтому

$$\gamma_0(x) \leq \omega(c_0, T/2), \quad \gamma_1(x) \leq \omega(c_1, T/2).$$

Эти неравенства означают равномерную ограниченность множества $A(c, T)$. Но в этом случае условие 5в) влечет равностепенную непрерывность $A(c, T)$.

Лемма 2. В условиях 1) — 5) функционал (1) полунепрерывен снизу в $C_{[t_0, t_1]}^n$.

Доказательство леммы используют следующее

Предложение. Если $g(x, y)$ — полунепрерывная снизу и выпуклая по y функция на $R^m \times R^n$, $g_\varepsilon(x, y) = \inf \{g(z, y) \mid z \in R^m, |z - x| \leq \varepsilon\}$ и $g_\varepsilon^{**}(x, y) = \text{вторая сопряженная } g_\varepsilon \text{ по } y$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon^{**}(x, y) = g(x, y)$ для

всех x и y , если только g удовлетворяет оценке типа (3).

Это утверждение позволяет свести доказательство леммы к случаю, когда f не зависит от x , где оно не представляет труда*.

Сопоставляя леммы 1 и 2, сразу приходим к доказательству теоремы.

5°. Мы уже отмечали выше, что задачи оптимального управления могут быть сведены к задачам типа (1), (2). Это можно делать разными способами. Вот один из них. Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, x, u) dt \rightarrow \inf; \quad (5)$$

$$\dot{x} = F(t, x, u), \quad u \in U(t, x) \subset R^m; \quad (6)$$

$$x \in X(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (7)$$

Положим

$$f(t, x, y) = \begin{cases} \inf \{g(t, x, u) \mid u \in U(t, x), F(t, x, u) = y\}, & \text{если } x \in X(t), \\ \infty, & \text{если } x \notin X(t). \end{cases} \quad (8)$$

Тогда задача (5) — (7) эквивалентна задаче (1), (2) с только что введенной функцией f , если, например, g и F непрерывны по x, u и измеримы

* Следует заметить, что Рокафеллар в неопубликованной еще работе «Optimal arcs and the minimum value function in problems of Lagrange» показал, что лемма 2 справедлива и без условия 5).

по t , графики многозначных отображений $t \rightarrow X(t)$ и $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ принадлежат σ -алгебре, описанной в условии 2), причем множества $X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и $U(t, x)$, $t \in [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, замкнуты, а отображение $x \rightarrow U(t, x)$ полунепрерывно сверху при всяком $t \in [t_0, t_1]$.

Если потребовать, чтобы f была выпуклой по u и наложить на g и F условия, гарантирующие достижимость нижней грани в (8) и справедливость условий 1) — 5) для f , то теорема 1 повлечет некоторую теорему существования для задачи (5) — (7). Этого можно достичь разными способами. Можно потребовать, например, чтобы g и F удовлетворяли неравенствам

$$g(t, x, u) \geq \varphi(|u|) - \psi(|x|),$$

$$|F(t, x, u)| \geq |u|,$$

где φ и ψ такие же, как в 5а) — 5г), или соотношениям

$$|F(t, x, u)| \rightarrow \infty \quad \text{при } u \in U(t, x), \quad |u| \rightarrow \infty,$$

$$g(t, x, u) \geq \varphi(|F(t, x, u)|) - \psi(|x|),$$

и т. д.

Поступило
14 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Tonneli, Ann. Scuola Norm., Pisa, 3, 401 (1934). ² M. Nagumo, Japan J. Math., 6, 178 (1929). ³ E. J. McShane, Ann. Scuola Norm. Pisa, 3, 181 (1934). ⁴ L. Cesari, Trans. Am. Math. Soc., 124, 369 (1966). ⁵ C. Olech, Trans. Am. Math. Soc., 136, 159 (1969).