

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 28 XII 1971)

Проблема нахождения условий, выделяющих класс единственности (корректности) слабых решений задачи Коши для системы квазилинейных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \Phi_i(u)}{\partial x_i} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad (1)$$

является одной из узловых в теории этих уравнений. В то время как для случая одного уравнения эти условия найдены для весьма широких классов решений ⁽¹⁻⁴⁾, в случае систем уравнений они неизвестны. Хорошо известные условия устойчивости газодинамических ударных волн (условия Цемплена) в форме, обобщенной на произвольные одномерные системы, были предложены в виде гипотезы в работах ⁽⁵⁻⁶⁾. Их непригодность в общем («невыпуклом») случае очевидна, однако и в «выпуклом» случае они остаются пока гипотетическими. Для уравнений газовой динамики с невыпуклым уравнением состояния условия устойчивости, уточняющие условия Цемплена, были указаны в работе ⁽⁷⁾. Для одномерной системы двух уравнений довольно произвольного вида подобные условия обсуждались в ⁽⁸⁾.

В настоящей заметке я хочу обратить внимание на одну формулировку условия устойчивости Кругикова ⁽⁴⁾, допускающую естественную экстраполяцию на системы уравнений. Эта формулировка связана с системами (1), имеющими форму Годунова ⁽⁹⁾

$$u = \partial L_0(w) / \partial w, \quad \varphi(u) = \partial L_1(w) / \partial w. \quad (2)$$

Будем рассматривать только системы с выпуклой (для определенности, кнizu) функцией $L_0(w)$. Как известно ⁽⁹⁾, одним из (независимых) следствий системы (1) в случае (2) является закон сохранения

$$\partial Q_0(u) / \partial t + \partial Q_1(u) / \partial x = 0, \quad (3)$$

где $Q_0 = -L_0 + uw$, $Q_1 = -L_1 + \varphi w$.

Функция $Q_0(u)$, будучи касательным преобразованием выпуклой функции $L_0(w)$, сама выпукла (кнizu).

Рассмотрим вначале автомодельные решения $u(x/t)$ задачи о распаде начального разрыва (u^-, u^+) для одномерной системы (1) ($u^\pm = u^0(\pm 1)$). Обозначая $u^\pm(s) = u(s \pm 0)$, получим следующее значение распределения $\partial Q_0 / \partial t + \partial Q_1 / \partial x$ на решении $u = u(x/t)$:

$$\sum_i [Q_1(u) - s_i Q_0(u)] \Big|_{\frac{x}{t} = s_i} \delta(x - s_i t), \quad (4)$$

где $[f] = f(u^+) - f(u^-)$, а суммирование распространено на все линии разрыва $x = s_i t$ решения $u(y)$. При $t = 0$ распределение (4) сосредоточено при $x = 0$ и имеет вид $H\delta(x)$, где

$$H = H(u(y)) = \sum_i [Q_1(u) - s_i Q_0(u)]_{y=s_i} \quad (5)$$

есть функционал, заданный на множестве $U(u^-, u^+)$ всех автомодельных решений рассматриваемой задачи о распаде разрыва.

Пусть рассматривается одно уравнение. Устойчивым решением $u(y)$ является в этом случае решение, каждая линия разрыва которого удовлетворяет условию Олейника (¹). Из простых геометрических соображений вытекает следующее утверждение (здесь предполагается строгая выпуклость $Q_0(u)$):

А. Решение $u(y)$ задачи о распаде разрыва для одномерного уравнения (1) в том и только в том случае устойчиво, если оно дает минимум функционалу H на множестве $U(u^-, u^+)$ всех автомодельных решений этой задачи:

$$H(u(y)) = \inf_{v \in U} H(v(y)). \quad (6)$$

Введем в плоскости (u, z) область

$$D = \{(u, z) | u_1 \leq u \leq u_2, \operatorname{sgn}(u^+ - u^-)(z - \varphi(u)) \geq 0\},$$

где $u_1 = \min(u^-, u^+)$, $u_2 = \max(u^-, u^+)$, и пусть D^* — выпуклая оболочка этой области,

$$D^* = \{(u, z) | u_1 \leq u \leq u_2, \operatorname{sgn}(u^+ - u^-)(z - \Phi(u)) \geq 0\}.$$

Тогда фигурирующая в (6) нижняя грань $H(v)$, как нетрудно проверить, равна

$$\int_{u^-}^{u^+} (\Phi(u) - \varphi(u)) Q_0''(u) du.$$

Пусть в полосе $S = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, |x| < \infty\}$ рассматривается задача Коши для уравнения (1). Слабое решение (ограниченное) всегда можно предполагать определенным таким образом, что для всяких R и x_0 функция $\int_{|x-x_0|<R} u(t, x) dx$ непрерывна по t . Под $\partial Q_0 / \partial t$ будем понимать распределение, определяемое на пробной функции $g(x)$ соотношением

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t}(g) = \frac{d}{dt} \int g(x) Q_0(u(t, x)) dx, \quad (7)$$

причем в правой части берется правая производная. Тогда распространение A на рассматриваемый случай приводит к следующему утверждению:

В. Слабое решение u задачи (1) устойчиво в S в том и только в том случае, если для всякого t_0 , $0 \leq t_0 < T$,

$$\frac{\partial Q_0(u(t_0, x))}{\partial t} = \inf \frac{\partial Q_0(v(t_0, x))}{\partial t}, \quad (8)$$

где инфимум берется по всем слабым решениям $v(t, x)$ задачи (1), совпадающим с $u(t, x)$ при $t \leq t_0$.

Замечание. Под устойчивым понимается решение, удовлетворяющее условию Кружкова (⁴).

Можно ожидать, что сформулированный экстремальный принцип устойчивости верен и для определенного класса систем уравнений вида (1), (2) (с выпуклой книзу функцией $L_0(w)$). Если речь идет об уравнениях газодинамики, а также в других случаях, когда уравнения (1) имеют ясный физический смысл, в справедливости этого принципа трудно сомневаться в силу очевидных физических соображений.

В случае, например, одномерного адиабатического течения газа уравнения (1) имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

а следствие (3) есть закон сохранения энтропии

$$\partial S / \partial t = 0$$

(как показано в ⁽¹⁰⁾, оно единственно). Выпуклость функции $(-S)$ в переменных $u_1 = V$, $u_2 = u$, $u_3 = \varepsilon + 1/2 u^2$ следует из ее выпуклости в переменных V , ε (а это термодинамический закон). Условие (8) означает, что устойчивым является решение, соответствующее максимальному приросту энтропии (каждой частицы газа), совместимому с законами сохранения (9), и, таким образом, представляет просто второй закон термодинамики. Аналогична ситуация и в случае изотермического потока, описываемого первыми двумя уравнениями системы (9). Следствием (3) здесь является закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(F(V) + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

где $F(V) = F(V, T)$ — удельная свободная энергия газа, а условие (8) имеет смысл максимальной потери свободной энергии, что также есть известный физический принцип (при постоянстве температуры).

Из принципа относительности Галилея следует, что в эйлеровых координатах ситуация аналогична.

Из сформулированного принципа (в форме А) легко получаются известные условия устойчивости ударных волн, как для выпуклых (условие Цемплена), так и для невыпуклых (условие Галина) уравнений состояния.

Отметим, что впервые идею о вероятной связи устойчивости с соотношением (3) высказал С. К. Годунов ⁽¹¹⁾, заметивший, что на устойчивых решениях, например, в случае изотермического потока, должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial (F + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} \leq 0.$$

В случае невыпуклых уравнений состояния это условие недостаточно для устойчивости, как показывают простые примеры.

В заключение заметим, что оснований для экстраполяции сформулированного принципа устойчивости на произвольные системы уравнений, конечно, нет. Более того, известны примеры систем (В. А. Тупчиев, устное сообщение), для которых он неверен.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. А. Олейник, УМН, 14, № 2, 165 (1959). ² Н. Н. Кузнецов, ДАН, 177, № 2 (1967). ³ А. И. Вольперт, Матем. сборн., 73, № 2 (1967). ⁴ С. Н. Кружков, ДАН, 187, № 1, 29 (1969). ⁵ К. И. Бабенко, И. М. Гельфанд, Научн. докл. высш. школы, физ. матем. науки, № 1, 12 (1958). ⁶ P. D. Lax, Communications Pure Appl. Math., 10, 537 (1957). ⁷ Г. Я. Галин, ДАН, 127, № 1, 55 (1959). ⁸ В. А. Тупчиев, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, № 3, 527 (1966). ⁹ С. К. Годунов, ДАН, 139, № 3, 521 (1961). ¹⁰ Б. Л. Рождественский, ДАН, 115, № 3, 454 (1957). ¹¹ С. К. Годунов, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 1, № 4, 623 (1961).