

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ПОРОЖДАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ
НАВЬЕ — СТОКСА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 I 1972)

Данная работа выполнена под влиянием работы ⁽¹⁾ Е. Хопфа, нашедшей свое продолжение в исследованиях Г. Проди и С. Фойаша, которые, к сожалению, полностью не опубликованы (см. ⁽²⁾).

Рассмотрим в ограниченной области Ω евклидова пространства E_2 следующую задачу:

$$v_t - \nu \Delta v + \sum_{k=1}^2 v_k v_{x_k} = -\nabla p + f(x), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $v = (v_1, v_2)$. Случаи, когда у v имеются три декартовых компоненты и когда v удовлетворяет неоднородному граничному условию $v|_{\partial\Omega} = a(s)$, $(a, n) = 0$, или условию периодичности по x (на всей границе или ее части), рассматриваются аналогично. Так же исследуется задача, когда имеется вращательная симметрия и ось вращения не принадлежит области, заполненной жидкостью.

Будем считать f и $\partial\Omega$ достаточно гладкими. Известно (см. ⁽³⁾), используемые ниже обозначения также берутся из ⁽³⁾), что задача (1), (2) однозначно разрешима при $t \geq 0$, если для v задано начальное условие $v|_{t=0} = a(x)$. Это имеет место в разных функциональных пространствах при соответствующей гладкости a . Наиболее широкий класс решений — это слабые решения (решения класса Хопфа), которые существуют при $\forall a \in \dot{J}(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Они имеют конечную «энергетическую» норму *

$$|v|_{Q_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|v(x, t)\| + \|v_x\|_{2, Q_T}$$

при $VT < \infty$ и непрерывно зависят от t в норме $L_2(\Omega)$. Для них справедливо энергетическое равенство, из которого следует оценка

$$\|v(x, t)\| \leq \|v(x, 0)\| e^{-\lambda_1 \nu t} + (1 - e^{-\lambda_1 \nu t}) (\lambda_1 \nu)^{-1} \|f\|. \quad (3)$$

В (3) λ_1 есть наименьшее собственное значение ($\lambda_1 > 0$) задачи

$$-\nabla u(x) = -\nabla q(x) + \lambda u(x), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Выберем число $R \geq R_0 = (\lambda_1 \nu)^{-1} \|f\|$. Для такого R решения $v(x, t)$ задачи (1), (2) с $v(x, 0) \in K_R = \{a(x) : a \in \dot{J}(\Omega), \|a\| \leq R\}$ не выходят из этого шара при $t \geq 0$. Обозначим через U_t ($t \geq 0$) оператор, ставящий в соответствие $\forall$ элементу $a(x) \in \dot{J}(\Omega)$ решение $v(x, t)$ задачи (1), (2), равное a при $t = 0$, так что $v(x, t) = U_t(a)$. Из сказанного выше следует, что U_t отображает K_R в $U_t(K_R) \equiv K_R(t) \subset K_R$. Известно (см. ⁽³⁾, гл. VI, (75)), что U_t — непрерывный оператор в пространстве $\dot{J}(\Omega)$. Кроме того, используя известные факты по задаче (1), (2), нетрудно показать, что из слабой сходимости в $\dot{J}(\Omega)$ $a^m(x)$ к $a(x)$ следует слабая сходимость в $\dot{J}(\Omega)$ $U_t(a^m)$ к $U_t(a)$ при $\forall t \geq 0$ (она равномерна по t на любом конечном интервале $[0, T]$). Назовем это свойство U_t «слабой непрерывностью».

Операторы U_t при $t > 0$ обладают свойством «сглаживания»: они переводят элементы K_R в гладкие функции, причем порядок гладкости за-

* $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$.

висит только от порядков гладкости f и $\partial\Omega$. Более того, нормы $\|U_t(a)\|_{2,\Omega}^{(l)}$ элементов из $K_R(t)$ * не превосходит $C_l(t)$, где $C_l(t)$ — непрерывные функции $t > 0$, ограниченные на любой полупрямой $[\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, если $\partial\Omega \in C^l$, а $f \in W_2^{l-2}(\Omega)$. Кроме того, решения $U_t(a)$ при $t > 0$ имеют производные D_t^m , $m \leq [l/2]$, и $\|D_t^m U_t(a)\|$ не превосходят $\hat{C}_m(t)$, имеющих такие же свойства, что и $C_l(t)$.

Это доказывается на основании соответствующих априорных оценок, которые выводятся не только для решений задачи (1), (2), но и для галеркинских приближений к ним. Вывод этих оценок аналогичен выводу оценок из моих старых публикаций (см. (3), гл. VI). В него надо ввести лишь одно видоизменение: прежде чем проводить интегрирование по t соответствующего равенства, надо умножить его на «срезающую» функцию $\zeta(t)$ — гладкую неотрицательную функцию $t \geq 0$, равную нулю при $t = 0$. Итак, U_t переводит K_R в множество $K_R(t)$, ограниченное в норме $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(1)}$ (и в более сильных нормах $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(l)}$), и потому является вполне непрерывным в K_R .

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_R = \prod_{t \geq 0} K_R(t), \quad (5)$$

в которое преобразуется K_R при «бесконечно большом t ».

Из «слабой непрерывности» U_t следует замкнутость $K_R(t)$ в $\dot{J}(\Omega)$, а потому и $\mathfrak{M}_R$. Множество $\mathfrak{M}_R$ можно охарактеризовать следующим образом: $\mathfrak{M}_R$ состоит из тех и только тех элементов $a(x) \in K_R$, для которых задача (1), (2) имеет решение $v(x, t)$, определенное для всех $t \in (-\infty, \infty) \equiv I$, равное $a(x)$ при $t = 0$ и не выходящее из K_R (иначе говоря, $\mathfrak{M}_R$ состоит из тех $a(x) \in K_R$, для которых разрешима в K_R прямая и обратная по t начально-краевая задача для (1), (2)).

Это предложение может быть доказано на основании указанных выше свойств оператора U_t , причем все до сих пор сказанное распространяется и на случай неоднородного краевого условия $v|_{\partial\Omega} = \alpha(s)$. Но для однородного краевого условия (и для условия $v|_{\partial\Omega} = \alpha(s)$ с $(\alpha, n) = 0$ **) мы можем утверждать большее: задача (1), (2) определяет на $\mathfrak{M}_R$ динамическую систему.

То, что из принадлежности $a(x)$ к $\mathfrak{M}_R$ следует принадлежность к $\mathfrak{M}_R$ всей траектории, очевидно. Требуется доказательства утверждение о корректности обратной (по времени t) задачи (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$, в том числе о ее единственности. Это выводится с использованием некоторой мультипликативной оценки, полученной совместно В. А. Солонниковым и мною, для решений линейных уравнений вида

$$dv/dt + A(t)v = 0. \quad (6)$$

В (6) функция $v(t)$ принимает значения из гильбертова пространства, а $A(t)$ — семейство линейных полуограниченных замкнутых операторов, гладко зависящих от t и удовлетворяющих условию

$$((A + \lambda I)u, (A^* - A)u) - (Au, u) \geq -c\|(A + \lambda I)u\| \cdot \|u\| \quad (7)$$

при каком-либо $\lambda \geq 0$. Неравенство (7) должно иметь место для любого элемента u из $\mathcal{D}(A)$ — области определения $A(t)$, причем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ и не зависит от t . При выполнении этих условий устанавливается такая оценка $\|v(t)\|$ для $t \in [t_1, t_2]$ через $\|v(t_1)\|$ и $\|v(t_2)\|$, из которой видно, что $\|v(t)\|$ стремится к нулю, если $\|v(t_1)\|$ или $\|v(t_2)\|$ стремится к нулю.

Из этого результата выводится корректность прямой и обратной начально-краевой задачи (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$. Эта корректность устанавливается

* $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(l)}$ есть норма в $W_2^{l-2}(\Omega)$.

** А также для условия периодичности на всей или части границы.

сначала в норме пространства $\dot{J}(\Omega)$, но отсюда и из того, что $\mathfrak{M}_R$ является ограниченным множеством в $W_2^l(\Omega)$, следует корректность в любом $W_2^k(\Omega)$ с $k < l$.

Итак, задача (1), (2) определяет на $\mathfrak{M}_R$ компактную динамическую систему, причем $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_{R_0}$. Тем самым для нее справедливы многочисленные факты, установленные для таких систем: предложения о предельных множествах, теория минимального центра притяжения, наличие инвариантных мер (теория Н. Н. Боголюбова — Н. Н. Крылова) и результаты о динамических системах с инвариантной мерой (теория Е. Хопфа и Г. Биргофа и ее развитие).

Мне кажется, что динамическая система (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$ и есть тот центральный объект, который надо исследовать при изучении движений жидкости в данном сосуде под воздействием внешнего поля f . Роль начального условия «сведена на нет», что соответствует как теоретическому, так и экспериментальному подходу к исследованию динамической картины в жидкостях. Структура $\mathfrak{M}_R$ весьма сложно зависит от числа Рейнольдса Re (т. е. от ν , если f и Ω фиксированы). Если Re мало, то $\mathfrak{M}_R$ состоит из одной точки — единственного стационарного решения задачи (1), (2).

При увеличении числа Re , как показывает теория возмущений, может появиться несколько стационарных решений, могут появиться также периодические или квазипериодические решения, и все они будут входить в $\mathfrak{M}_R$. Задача (1), (2) может иметь даже континуальное множество стационарных решений (см. ⁽⁴⁾), и нет оснований считать, что все траектории (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$ почти периодичны. Правда, временные средние на них существуют, согласно теореме Г. Биргофа, для почти всех (относительно любой инвариантной меры) $a(x)$ из $\mathfrak{M}_R$.

Е. Хопф ⁽¹⁾ высказал гипотезу, что предельные точки (при $t \rightarrow \infty$) для задачи (1), (2) образуют конечномерное многообразие. Он показал, что подобный феномен имеет место для некоторой модельной задачи. Ряд интересных результатов в этом направлении для задачи (1), (2) доказан в ⁽²⁾. Для системы (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$ я доказала такие факты: величины ν , $\|f\|$ и Ω определяют число n такое, что ортогональный проектор P_n на первые n собственных функций задачи (4) обладает следующими свойствами: траектория $v(x, t)$ из $\mathfrak{M}_R$ полностью определяется своей проекцией $P_n v(x, t)$ (в частности, если $P_n v(x, t)$ не зависит от t , то $v(x, t)$ не зависит от t ; отсюда следует, что множество стационарных решений задачи (1), (2) гомеоморфно некоторому ограниченному множеству из E_n — результат, установленный в ⁽²⁾). Далее, если $P_n v(x, t)$ имеет период τ по t , то и $v(x, t)$ — τ — периодична; если $P_n v(x, t)$ почти периодична, то почти периодична и вся траектория $v(x, t)$. Если для $P_n v(x, t)$ известна функция $\hat{w}(x, t)$, к которой она приближается при $t \rightarrow \infty$, то по $\hat{w}(x, t)$ определяется функция $w_1(x, t)$, к которой стремится $v(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Я надеюсь, что «извлеченная» из гидродинамики вязких жидкостей динамическая система (1), (2) на $\mathfrak{M}_R$ окажется полезной как при изучении предельных режимов (когда $t \rightarrow \infty$), так и при развитии теории турбулентности, в которой надо изучать разные предельные характеристики этой системы при $\nu \rightarrow 0$. Один из первых открытых вопросов: не совпадает ли $\mathfrak{M}_R$ с ω -предельными точками динамической системы (1), (2)? Результаты работы переносятся на определенный класс параболических уравнений и систем и уравнений вида $dv/dt = A(v)$ в гильбертовом пространстве.

Поступило
25 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math., 1, 303 (1948). ² C. Foias, G. Prodi, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, 39, 1 (1967). ³ О. А. Ладыженская, Матем. вопр. динамики вязких несжимаемых жидкостей, «Наука», 1970. ⁴ В. И. Юдович, ПММ, 29, № 3, 453 (1965).