

Академик АН КиргССР М. Я. ЛЕОНОВ

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматриваются поликристаллические материалы, для которых упругие деформации определяются законом Гука. Вычитая их из наблюдаемых деформаций, получим неупругие деформации; их девиаторную часть назовем пластической деформацией.

Неупругие деформации в основном происходят за счет перемещения микродефектов твердого тела. Наиболее подвижными являются линейные дислокации; перемещение одной такой дислокации представляет скольжение определенных слоев атомов в направлении, перпендикулярном дислокации. Эксперименты с монокристаллами показывают, что локальные скольжения происходят в плоскостях с наибольшей плотностью расположения атомов в направлении наибольшей плотности их упаковки при достижении соответствующей компоненты касательного напряжения величины, постоянной для данного материала.

В силу упругой анизотропии кристаллических зерен распределение напряжений в поликристаллическом теле будет всегда неоднородным. Скольжение в наиболее невыгодно ориентированном зерне вначале вызовет только упругие деформации окружающих зерен. Эти деформации (напряжения) не определяются; компенсируем их влияние, учитывая следующее.

Аксиома 1. *Элементарное скольжение в идеально однородной модели поликристаллического тела изменяет механические свойства почти во всех направлениях.*

1. Математическая модель пластического тела.

1⁰) Представим макрооднородное изотропное тело, имеющее линейные дислокации во всех плоскостях и направлениях, причем плотность этих дислокаций и плотность различных включений, препятствующих перемещениям дислокаций (локальным скольжениям), везде одинакова.

В процессе макрооднородного нагружения твердого тела за предел упругости локальные скольжения происходят по множеству (вееру) плоскостей и вееру направлений в плоскостях скольжения. В результате скольжений по плоскостям с нормальными n , заключенными внутри телесного угла $d\Omega$ в направлениях l , заключенных внутри угла $d\omega$, произойдет сдвиг

$$d\gamma_{nl} = \varphi_{nl} d\Omega d\omega, \quad (1,1)$$

где φ_{nl} — интенсивность скольжения в плоскостях с нормалью n в направлении l .

При изменении направления, в котором определяется сдвиг от указанных скольжений, на противоположную соответствующая компонента сдвига изменит только знак, т. е. $d\gamma_{nl} = -d\gamma_{n(-l)}$. Отсюда следует, что

$$\varphi_{n(-l)} \equiv -\varphi_{nl}, \quad (1,2)$$

т. е. скольжение в направлении l представляет тот же процесс, что и скольжение обратного направления и знака.

Суммируя соответствующие компоненты тензора деформации от сдвигов (1,1), найдем

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} (l_x n_y + l_y n_x) \varphi_{nl} d\Omega d\omega, \quad (1,3)$$

где l_x, n_x — проекции единичных векторов n и l на ось x ; $\mathcal{D}$ — область всех (положительных и отрицательных) скольжений.

Остальные компоненты тензора пластических деформаций получаются из последней формулы простой заменой индексов, причем $\gamma_{xx} = 2\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zz} = 2\varepsilon_z$.

2⁰) Из множества плоскостей и направлений скольжения зафиксируем некоторую нормаль v к произвольной плоскости скольжения и направление λ в этой плоскости внутри веера скольжений. Компоненту касательного напряжения в указанном направлении назовем сопротивлением пластическому сдвигу $S_{v\lambda}$. В соответствии с аксиомой 1, это сопротивление должно содержать интегральную операцию по переменным n и l . Оно должно содержать и операцию дифференцирования по времени t , поскольку вид диаграммы напряжение — деформация заметно зависит от скорости нагружения.

Сказанное можно представить в виде

$$S_{v\lambda}\varphi_{nl} = \tau_{v\lambda} \quad \text{при} \quad \partial\varphi_{v\lambda}/\partial t > 0, \quad (1,4)$$

где $S_{v\lambda}\varphi_{nl}$ — интегро-дифференциальный оператор, характеризующий изменение физических свойств материала в зависимости от интенсивности скольжений φ_{nl} ; $\tau_{v\lambda}$ — известная компонента касательного напряжения.

В начальном состоянии тело будем считать изотропным, удовлетворяющим условию

$$\varphi_{nl}|_{t=0} = 0. \quad (1,5)$$

Обозначим через $\mathcal{D}'$ область, в которой в данный момент происходят скольжения, а через Γ — ее границу. Будем считать, что на этой границе скорости скольжений непрерывны, т. е.

$$\partial\varphi_{nl}/\partial t|_{\Gamma} = 0. \quad (1,6)$$

Это утверждение является следствием постулата непрерывности (¹, ²), налагающего определенные ограничения на оператор $S_{v\lambda}$; в частности, если бы оператор $S_{v\lambda}$ был чисто интегральным, то его ядро должно быть сингулярным. Условие непрерывности (1,6) при известном операторе $S_{v\lambda}$ позволяет определить область скольжения.

Основной задачей теории пластичности является: найти такой оператор $S_{v\lambda}$, при котором интенсивность скольжения φ_{nl} , определенная из условий (1,4) — (1,6), дает по формулам вида (1,3) зависимости между компонентами тензора напряжений и деформаций, наблюдаемые в экспериментах.

Эта задача в математическом отношении необычно сложна. Ее решение возможно только путем постепенного подбора оператора $S_{v\lambda}$. По-видимому, более строгого пути создания общей математической теории пластичности не существует.

2. Начальная стадия пластической деформации.

1⁰) Далее рассматриваются только такие материалы, для которых нормальные напряжения не оказывают влияния на пластические деформации (предел упругости при растяжении и сжатии одинаков).

Обозначим через S_m^0 начальное сопротивление пластическому сдвигу в направлении максимального касательного напряжения. Условие упругости в рассматриваемом случае не зависит от первого инварианта, и поэтому его можно представить в виде

$$\Phi(J_2, J_3) < 0, \quad (2,1)$$

где Φ — функция второго J_2 и третьего J_3 инварианта напряжений. Указанные инварианты можно выразить через максимальное (τ_m) касательное напряжение и октаэдрическое (τ_0) касательное напряжение. Поэтому

условие упругости (2,1) можно представить иначе:

$$\tau_m < f(\tau_i). \quad (2,2)$$

В силу следствия из аксиомы (1), принятой в работе (3), при достижении предела упругости сопротивление сдвигу будет

$$S_m^0 = f(\tau_i). \quad (2,3)$$

При условии пластичности Треска имеем

$$S_m^0 = \text{const}, \quad (2,4)$$

а условие пластичности Губера — Мизеса ($\tau_i = \text{const}$) характеризуется некоторой зависимостью сопротивления сдвигу от вида напряжения, т. е.

$$|dS_m^0/d\tau_i| = \infty. \quad (2,5)$$

Следовательно, если верить в реальность условия пластичности Губера — Мизеса, то влияние упругих деформаций (вида напряженного состояния) на сопротивление сдвигу может быть весьма большим.

2⁰) В начальной стадии пластической деформации с ограниченной скоростью влиянием времени и последовательности скольжений на сопротивление сдвигу можно пренебречь (постулат антиизотропии) и представить его в виде некоторой функции от компонент напряжений и деформаций и некоторого линейного (интегрального) оператора $L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}$ такого, что

$$L_{\nu(-\lambda)}\varphi_{nl} = -L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}. \quad (2,6)$$

В работе (1) принято

$$L_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = \int_{[v]} \varphi_{\nu l} F(\omega_{l\lambda}) d\omega_{l\lambda}, \quad \omega_{l\lambda} = \hat{l}\lambda, \quad (2,7)$$

где $[v]$ означает множество направлений l всех скольжений в плоскости с нормалью v , причем функция $F(\omega)$ удовлетворяет (1) условиям

$$F(\omega + \pi) = -F(\omega), \quad F(0) = \infty. \quad (2,8)$$

Более подробно рассматривался (2) частный случай

$$F(\omega) = 1/2[\delta(\omega) - \delta(|\omega| - \pi)] + b \cos \omega, \quad b = \text{const}, \quad (2,9)$$

где $\delta(\omega)$ — функция Дирака. При этом

$$L_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = \varphi_{\nu\lambda} + b \int_{[v]} \varphi_{\nu l} \cos l\lambda d\omega_{l\lambda}. \quad (2,10)$$

Таким образом, в начальной стадии пластических деформаций сопротивление сдвигу представляется в виде

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = S(\tau_i, \tau_m, \dots, \gamma_{\nu\lambda}, L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}), \quad (2,11)$$

т. е. она является функцией линейного оператора $L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}$, компонент девиатора напряжений ($\tau_i, \tau_m, \dots$) и деформаций ($\dots, \gamma_{\nu\lambda}$), причем

$$\gamma_{\nu\lambda} = v_x \lambda_x \gamma_{xx} + v_y \lambda_y \gamma_{yy} + \dots + (v_x \lambda_z + v_z \lambda_x) \gamma_{xz}, \quad (2,12)$$

где $v_x, \dots, \lambda_z$ — проекции единичных векторов v, λ на указанные оси, $\gamma_{xx}, \dots, \gamma_{xz}$ — компоненты тензора пластических деформаций, определенные ранее (1,3).

3⁰) Пусть N означает нормаль к некоторой плоскости скольжения, а L — направление скольжения в ней; для определенности можно положить, что скорость скольжения ($d\varphi_{nl}/dt$) достигает максимума при $v = N$ и

$l = L$. Если все направления скольжений в данный момент времени отличаются незначительно, то можно представить

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} \approx \psi + \Psi_1\gamma_{\nu\lambda} + \Psi_2 L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}, \quad (2,13)$$

где ψ , Ψ_1 , Ψ_2 — функции аргументов, не зависящих от ν и λ ; такими аргументами являются

$$\tau_i, \tau_m, \tau_{NL}, \gamma_{1,2}, \gamma_{NL}, L_{NL}\varphi_{nl}, \quad (2,14)$$

причем $\gamma_{1,2}$ — инварианты девиатора деформаций.

Подстановка последней формулы в условие (1,4) дает уравнение для определения интенсивности скольжений φ :

$$L_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = (\tau_{\nu\lambda} - \Psi_1\gamma_{\nu\lambda} - \psi) / \Psi_2, \quad \partial\varphi_{\nu\lambda} / \partial t > 0, \quad (2,15)$$

т. е. $L_{\nu\lambda}\varphi_{nl}$ с изменением ν и λ при $t = \text{const}$ изменяется по закону преобразования компонент тензора второго ранга с точностью до аддитивной постоянной (ψ / Ψ_2). Это свойство правой части уравнения (2,15) позволяет находить его эффективные и достаточно общие решения.

Некоторое обоснование выбора оператора (2,13) можно найти в работе (3).

Среду, наделенную свойством (2,13), назовем антиизотропно упрочняющейся.

Институт физики и математики
Академии наук КиргССР
Фрунзе

Поступило
21 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Я. Леонов, ДАН, 199, № 1 (1971). ² М. Я. Леонов, Изв. АН КиргССР, № 3 (1970). ³ М. Я. Леонов, ДАН, 199, № 2 (1971).