Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 519.4:517:513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ЛОГИНОВ, В. С. ШУЛЬМАН

О ТЕОРЕМЕ САРОЗОНА И ГИПОТЕЗЕ РАДЖАВИ — РОЗЕНТАЛЯ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 29 XII 1971)

Пусть H — гильбертово пространство и $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в H. Для $S \subset B(H)$ положим

$$\operatorname{Alglat} S = \{A \in B(H):\ Ax \in \overline{Sx},\ x \in H\},$$

где черта означает замыкание по норме в H; множество S рефлексивно, если $\operatorname{Alglat} S = S$. В работе (1) $\operatorname{alglat} S$ определяется как совокупность всех операторов из $B(H)$, оставляющих на месте все подпространства, инвариантные относительно S. В том (наиболее важном) случае, когда S — подалгебра в $B(H)$, содержащая единичный оператор 1, наше определение совпадает с данным в (1), хотя вообще $\operatorname{Alglat} S \subseteq \operatorname{alglat} S$.

В работе (2) был по существу получен следующий результат.

Теорема (Сарозон). *Всякое слабо (даже сильно) замкнутое семейство коммутирующих нормальных операторов рефлексивно.*

Следствие. *Слабо замкнутые подалгебры коммутативных W^*-алгебр рефлексивны.*

В работе (1) была высказана следующая

Гипотеза Раджави — Розенталя. *Слабо замкнутая алгебра, содержащая максимальную абелеву симметричную подалгебру (м.а.с.п.) алгебры $B(H)$, рефлексивна.*

Другими словами, *если слабо замкнутая алгебра имеет W^*-подалгебру с коммутативным коммутантом, то она рефлексивна.*

В работах (1, 3, 4) были доказаны некоторые частные случаи этой гипотезы. Отметим следующий результат (3, 4): *если слабо замкнутая алгебра содержит атомическую (т. е. порожденную минимальными проекторами) W^*-подалгебру с единицей, коммутант которой коммутативен, то она рефлексивна.* Мы докажем теорему, одновременно обобщающую этот результат и теорему Сарозона.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{A}$ — атомическая W^*-подалгебра W^*-алгебры R, содержащая единицу, такая, что коммутант $\mathfrak{A}' \cap R$ алгебры $\mathfrak{A}$ в R коммутативен, то всякая слабо замкнутая подалгебра алгебры R, содержащая $\mathfrak{A}$, рефлексивна.*

Докажем предварительно следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть R_1 и R_2 — W^*-алгебры, $1 \in R_1 \subset R_2$ и E — проектор из R_1.*

Тогда

$$(ER_1E)' \cap (ER_2E) = E(R_1' \cap R_2)E.$$

Доказательство. Заметим, что эта лемма обобщает хорошо известное для случая $R_2 = B(H)$ утверждение (см., например, (5), стр. 550). Поэтому $(ER_1E)' \cap (EB(H)E) = ER_1'E$. Отсюда, так как $E(R_1' \cap R_2)E \subset \subset ER_1'E$ и $E(R_1' \cap R_2)E \subset ER_2E$, то

$$(E(R_1' \cap R_2)E) \subset (ER_1'E) \cap (ER_2E) \subset (ER_1E)' \cap (EB(H)E) \cap \cap (ER_2E) = (ER_1E)' \cap (ER_2E).$$

Далее, если $A \subset R_2'$, $B \in R_1$, то $EABE = EE^2ABE = EAE^2BE = (EAE) \times \times (EBE)$. Следовательно, $E(R_1R_2')E \subset (ER_1E) \vee (ER_2'E)$ * и, значит,

* Если $S_1, S_2 \subset B(H)$, то $S_1 \vee S_2$ — минимальная W^*-алгебра, содержащая S_1 и S_2.

$E(R_1 \vee R_2')E \subset (ER_1E) \vee (ER_2'E)$. Переходя в последнем соотношении к коммутантам, получим

$$E(R_1' \cap R_2)E = E(R_1 \vee R_2')'E =$$
$$= (E(R_1 \vee R_2')E)' \cap (EB(H)E) \supset (ER_1'E) \cap (ER_2E). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), приходим к требуемому равенству.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ и R те же, что и в условии теоремы 1, и E — минимальный проектор из $\mathfrak{A}$.*

Тогда алгебра ERE коммутативна (т. е. E — абелев проектор в R).

Доказательство. Очевидно, $E\mathfrak{A}E = \{\lambda E\}$. Поэтому по лемме 1

$$ERE = (ERE) \cap (E\mathfrak{A}E)' = E(R \cap \mathfrak{A}')E,$$

т. е. ERE — коммутативная алгебра.

Для любого проектора $P \in R$ обозначим $z(P)$ его центральный носитель (т. е. минимальный проектор из $R \cap R'$, мажорирующий P).

Доказательство теоремы 1. Пусть E, F — произвольные минимальные проекторы алгебры $\mathfrak{A}$, положим $E_1 = Ez(F)$, $F_1 = Fz(E)$. Тогда для любого $A \in R$

$$E_1AF_1 = Ez(F)AFz(E) = z(E)EAFz(F) = EAF. \qquad (3)$$

Поскольку $E_1RE_1 = z(F)ERE$, $F_1RF_1 = z(E)FRF$, по лемме 2 проекторы E_1 и F_1 — абелевы; кроме того, $z(E_1) = z(E)z(F) = z(F_1)$. Поэтому проекторы E_1 и F_1 эквивалентны (см. ([6])), т. е. существует частичная изометрия $V \in R$ такая, что $V^*V = E_1$, $VV^* = F_1$.

Пусть теперь S — слабо замкнутая подалгебра алгербы R, содержащая $\mathfrak{A}$, и $B \in \operatorname{Alglat} S$. Для любого $x \in H$ имеем $BF_1x \in \overline{SF_1x}$, $VBF_1x \in \overline{VSF_1x}$ и, следовательно, $VBF_1 \in \operatorname{Alglat} VSF_1$. Далее $VSF_1 = VE_1SF_1 = F_1V^*SF_1 \subset F_1RF_1$ и, так как F_1RF_1 — коммутативная W^*-алгебра, по теореме Саросона

$$\operatorname{Alglat} VSF_1 = \overline{VSF_1}^w$$

(где «$-w$» означает слабое замыкание). Отсюда $VBF_1 \in \overline{VSF_1}^w$ и, учитывая (3),

$$EBF = E_1BF_1 = V^*VBF_1 \in \overline{V^*VSF_1}^w = \overline{E_1SF_1}^w = \overline{ESF}^w \subset \overline{S}^w = S. \qquad (4)$$

Обозначим

$$\mathfrak{A}_E = \{A \in \mathfrak{A}\colon EBA \in S,\ EBA^* \in S\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{A}_E$ — W^*-алгебра, содержащая на основании (4) все минимальные проекторы $\mathfrak{A}$. Поэтому в силу атомичности $\mathfrak{A}$ имеем $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}$, $1 \in \mathfrak{A}_E$ и $EB \in S$. Отсюда, совершенно аналогично, семейство операторов $\{A \in \mathfrak{A}\colon AB \in S,\ A^*B \in S\}$ совпадает с $\mathfrak{A}$, содержит единицу и, значит, $B \in S$. Теорема доказана.

Как видно из доказательства теоремы 1, она допускает следующее обобщение.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} \subset R$ — W^*-алгебры, причем $\mathfrak{A}$ содержит систему абелевых проекторов, верхняя грань которой равна 1.*

Тогда всякая слабо замкнутая алгебра S такая, что $\mathfrak{A} \subset S \subset R$, рефлексивна.

Авторы выражают благодарность М. А. Наймарку за внимание к работе.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
15 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Radjavi, P. Rosenthal, Am. J. Math., 91, 683 (1969). [2] D. E. Sarason, Pacific J. Math., 17, 511 (1966). [3] C. Davis, H. Radjavi, P. Rosenthal, Canad. J. Math., 21, 1178 (1969). [4] В. С. Шульман, Матем. сборн., 87 (129), № 2 (1972). [5] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», 1968. [6] R. Kadison, Duke Math. J., 29, 459 (1962).